Recenzja pracy doktorskiej
mgr. Bartłomieja Kielaka
pt. „Generlizations of Turán-type problems"

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Bartłomiej Kielak rozwiązał kilka problemów ekstremalnej teorii grafów dających się zakwalifikować jako uogólnienia problemów typu Turána. Wyniki zostały uzyskane w większości wspólnie z innymi osobami. Autor na początku każdego rozdziału dokładnie opisuje swój wkład w udowodnienie poszczególnych rezultatów.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów. W krótkim rozdziale 1 Autor zaznajamia czytelnika z tematyką rozprawy doktorskiej, a także w bardzo zgrabny, zwięzły sposób przedstawia główne jej wyniki.

W rozdziale 2 Autor wprowadza notację oraz definiuje pojęcia używane w rozprawie doktorskiej. Sporo miejsca poświęca też opisowi narzędzi dowodowych, które są w niej użyte. Rozdział ten napisany jest starannie i bardzo ułatwia czytanie dalszej części pracy, choć udało mi się znaleźć kilka mniej istotnych niedokładności.

Głównym wynikiem w rozdziale 3 jest rezultat odpowiadający na pytanie jaka jest największa liczba cykli długości k w grafach bez cykli długości $k-2$, dla nieparzystych $k \geq 7$. Wynik ten został udowodniony pewną metodą probabilistyczną użytą wcześniej przez Krála, Norina i Volca do rozwiązania innego problemu. Wykorzystany jest tu także fakt wynikający z Lematu Szemerédiego o regularności. Warto dodać, że ten sam problem dla $k = 5$ jest treścią znanego problemu postawionego przez Erdősa a rozwiązanego między innymi przez promotora pomocniczego Doktoranta.

W rozdziale 4 znajdujemy szereg rezultatów dotyczących problemów typu Turána dla grafów zorientowanych. W takich grafach analogiczną rolę do liczby chromatycznej w grafach nieskierowanych gra parametr, który na potrzeby tej recenzji nazwę ściśliwością (ang. compressibility). Znajomość wartości tego parametru pozwala dla dużej klasy grafów zorientowanych znaleźć asymptotyki na odpowiednie liczby typu Turána. Oczywistym ograniczeniem dolnym na ściśliwość jest rząd najdłuższej ścieżki skierowanej. Naturalnym i ciekawym pytaniem jest dla jakich rodzin grafów zorientowanych ściśliwość jest ograniczona z góry przez wielomian względem rzędu najdłuższej skierowanej ścieżki. W rozdziale 4 podana jest częściowa odpowiedź na to pytanie. Twierdzenie 4.12 pokazuje interesujący związek tego problemu ze znaną hipotezą Erdősa-Hajnala i mówi, że jeśli ta hipoteza jest prawdziwa, to odpowiedź na powyższe pytanie jest pozytywna dla grafów zorientowanych o ograniczonych stopniach wyjściowych. Dowód tego twierdzenia to zgrabny, choć dość prosty, argument probabilistyczny. Dla grafów zorientowanych o stopniu wyjściowym ograniczonym przez 2 Autor znajduje ograniczenie górne na ściśliwość przez wielomian stopnia 4 względem rzędu najdłuższej ścieżki (Twierdzenie 4.14). Pomysłowy dowód tego twierdzenia bazuje głównie na argumentach zliczeniowych. W dalszej części rozdziału 4 znajdują się wyniki dotyczące ściśliwości pewnych szczególnych grafów będących uogólnieniami kwadratu ścieżki (Twierdzenie 4.19). W tym przypadku udało się ustalić dokładne wartości tego parametru lub dość ścisłe oszacowania. Dalej, Autor znajduje pewną szeroką klasę acyklicznych grafów zorientowanych, dla których ściśliwość jest równa swojemu dolnemu ograniczeniu, tj. rzędowi najdłuższej ścieżki (Twierdzenie 4.27). Dość złożone kombinatoryczne dowody tych rezultatów bazują na szczegółowej analizie własności odpowiednich grafów turniejowych. W dowodach w tym rozdziale korzysta się z wcześniejszych wyników wielu autorów.

Rozdział 5 poświęcony jest zorientowanej wersji problemów rozważanych w rozdziale 3 dla grafów nieskierowanych. Chodzi o to, aby odpowiedzieć na pytanie jaka może być największa liczba zorientowanych cykli C_k w zorientowanym grafie o n wierzchołkach bez cykli C_ℓ, gdzie $\ell > k$. Tego typu problemy nie były wcześniej rozważane w kontekście grafów zorientowanych. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie silnie zależy od tego czy k dzieli ℓ czy nie. Pierwszy przypadek, gdy k dzieli ℓ, jest łatwiejszy. Dość prostymi metodami znajduje się „zgrubną" asymptotykę dla tej liczby dla dowolnego $k \geq 6$ i ℓ (Twierdzenie 5.2) i dokładniejszą dla $k = 3$ i $\ell = 6$ (Twierdzenie 5.3). Drugi przypadek jest znacznie trudniejszy. Dla dostatecznie dużego ℓ w stosunku do k Autor dowodzi asymptotykę na interesującą go liczbę gdy k jest nieparzyste, a ℓ parzyste (Twierdzenie 5.4). Dla wszystkich $k < 6$ i dowolnych $\ell > k$ także znalezione są asymptotyki na rozważaną liczbę cykli (Twierdzenia 5.5 -5.7). Dowody tych twierdzeń są skomplikowane i wymagają zastosowania różnorodnych metod. Zasadnicze znaczenie ma tu wspomniana już wcześniej metoda Krála, Norina i Volca, ale używa się też metody algebr flagowych, faktu wynikającego z Lematu Szemerédiego o regularności, faktu z teorii liczb (problem Frobeniusa), a także wykorzystuje się wcześniejsze wyniki innych autorów.

Rozdział 6 dotyczy parametru, który na potrzeby tej recenzji nazwę indukcyjnością (ang. inducibility). Mówiąc w pewnym uproszczeniu, parametr ten mierzy ile najwięcej indukowanych podgrafów ustalonego grafu H może zawierać graf o n wierzchołkach. Z parametrem tym wiąże się intrygująca hipoteza Pippengera i Golumbica z 1975 przewidująca wartość tego parametru dla cykli. W ostatnich latach ukazało się sporo wyników różnych autorów związanych z tą hipotezą oraz rezultatów dotyczących indukcyjności innych niż cykle grafów H. Najmniejszy graf, dla którego wartość tego parametru nie jest znana to 4-wierzchołkowa ścieżka. W tym przypadku znane są jedynie górne i dolne ograniczenia na indukcyjność. Wynik zawarty w rozdziale 6 to konstrukcja ciągu grafów zawierających dużo indukowanych kopii ścieżki o czterech wierzchołkach, która poprawia, choć dość nieznacznie, ograniczenie dolne na indukcyjność w tym przypadku. Graf, na którym bazuje ta konstrukcja, został znaleziony z użyciem komputera za pomocą pewnego, odpowiednio zaprojektowanego, algorytmu przeszukiwania.

Ostatni rozdział rozprawy doktorskiej mgr. Kielaka zawiera wyniki dotyczące analogicznego problemu jak ten rozważany w rozdziale 6, ale dla grafów zorientowanych. Zorientowana wersja indukcyjności jest mniej zbadana niż jej wersja nieskierowana, ale w ostatnich latach ukazało się kilka prac poświęconych tego typu problemom. W rozdziale 7 znaleziono dokładne wartości indukcyjności lub bardzo bliskie sobie ograniczenia górne i dolne dla wszystkich grafów zorientowanych o czterech wierzchołkach. (Dla grafów zorientowanych o trzech i mniej wierzchołkach wartości te były wcześniej znane.) Udowodnienie ograniczeń dolnych wymagało podania 30 różnych konstrukcji ciągów grafów zorientowanych, niektórych całkiem nieoczywistych. Do pokazania ograniczeń dolnych użyto natomiast w większości przypadków algebr flagowych oraz programu Flagmatic, który sprowadza problem algebr flagowych do problemu programowania półokreślonego. Warto dodać, że dr Kielak jest autorem nietrywialnego dowodu ograniczenia górnego bez użycia algebr flagowych w jednym z przypadków, gdzie udało znaleźć dokładną wartość indukcyjności. W pozostałych przypadkach miał swój udział w znajdowaniu konstrukcji dowodzących dolnych ograniczeń. Co ciekawe, konstrukcje te są istotnie różne od optymalnych konstrukcji dla dużych grafów, dla których ten problem został rozwiązany.

Podsumowując, w moim przekonaniu, jest to bardzo solidna praca doktorska. Tematyka doktoratu mieści się w głównym nurcie współczesnej ekstremalnej kombinatoryki. Uzyskane przez Doktoranta wyniki są odpowiedziami lub częściowymi odpowiedziami na naturalne, niełatwe pytania rozważane w tym nurcie i powiązane z wieloma innymi znanymi problemami. Większość rozważanych w rozprawie problemów to zagadnienia cieszące się w ostatnich latach dużym zainteresowaniem w międzynarodowym środowisku badaczy pracujących w tej dziedzinie. Część rezultatów zawartych w pracy doktorskiej mgr. Kielaka zostało już opublikowanych we współautorskich artykułach, które ukazały się w czasopismach Journal of Graph Theory oraz Discrete Mathematics. Pozostałe wyniki są przygotowywane do publikacji.

Oprócz samych wyników, warto zwrócić uwagę na metody stosowane w dowodach. Doktorant pokazał, że dobrze zna i umie stosować współczesne metody stosowane w ekstremalnej kombinatoryce. Oprócz typowo kombinatorycznych rozumowań używa takich narzędzi jak Lemat o regularności, metoda algebr flagowych czy metody probabilistyczne. Świetnie też orientuje się w aktualnej i również starszej literaturze z zakresu ekstremalnej kombinatoryki. W wielu miejscach bowiem korzysta zarówno ze starszych jak i nowych wyników i metod.

Doktorat napisany jest dojrzale i starannie, z dużą kulturą matematyczną, choć w niektórych dowodach brakowało mi nieco dokładniejszego wyjaśnienia pewnych kroków. Autor pokazał, że potrafi nie tylko precyzyjnie formułować rozumowania, dowodzone twierdzenia, czy definicje, ale również zgrabnie, nieformalnie streszczać uzyskane wyniki. Podobają mi się zakończenia rozdziałów, gdzie Autor pokazuje potencjalne dalsze kierunki badań i formułuje ciekawe hipotezy.

Tak jak napisałem na wstępie niniejszej recenzji, mgr Kielak uzyskał wyniki zawarte w swojej rozprawie doktorskiej we współpracy z kilkoma innymi osobami. Z informacji zawartych w pracy wynika, że miał on swój udział w udowodnieniu niemal wszystkich rezultatów, które przedstawił w rozprawie, a kilka z nich pokazał samodzielnie. Moim zdaniem jego wkład był wystarczający z punktu widzenia wymagań stawianych w pracach doktorskich.

Konkludując uważam, że rozprawa doktorska mgr. Bartłomieja Kielaka spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. W szczególności zawiera oryginalne rozwiązania istotnych problemów naukowych z zakresu kombinatoryki. W pełni uzasadnia to nadanie mu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Zbigniew Lonc

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

16 czerwca 2023 r.