

Streszczenie

W 1941 roku Turán wyznaczył maksymalną liczbę krawędzi jaką może posiadać graf na zadanej liczbie wierzchołków bez wymuszenia grafu pełnego ustalonego rzędu. Od tego czasu rozważano wiele tak zwanych problemów typu Turána o maksymalizację wartości jakiegoś parametru grafowego, takiego jak liczba podgrafów izomorficznych do zadanego grafu, w grafie z zabronioną pewną podstrukturą. Wnosimy wkład w te rozważania poprzez udowodnienie kilku wyników dotyczących różnych problemów typu Turána.

Po pierwsze, wnosimy wkład do problemu maksymalizacji liczby k -cykli w grafie bez ℓ -cykli poprzez wyznaczenie dokładnej asymptotyki tej liczby gdy $k \geq 7$ jest nieparzyste oraz $\ell = k - 2$. Jest to rozszerzenie długo nieudowodnionego problemu Erdősa dotyczącego maksymalnej liczby pięciokątów w grafie bez trójkątów, który został rozwiązany dopiero w ostatnim czasie.

Następnie badamy problem maksymalizacji liczby łuków w grafie zorientowanym, który nie zawiera danego grafu zorientowanego jako podgraf. Dokładna asymptotyka jest powiązana z pewnym parametrem grafowym zwanym kompresyjnością. Udowadniamy kilka rezultatów dotyczących tempa wzrostu kompresyjności względem długości najdłuższej ścieżki. W szczególności, dowodzimy, że jeśli maksymalny stopień wychodzący acyklicznego grafu zorientowanego wynosi co najwyżej dwa, to jego kompresyjność jest ograniczona z góry przez wielomian stopnia co najwyżej cztery.

Rozważamy również problem maksymalizacji skierowanych k -cykli w zorientowanym grafie bez ℓ -cykli. Wyznaczamy rząd wielkości dla wszystkich wyborów k i ℓ oraz dokładną asymptotykę w wielu przypadkach.

Wreszcie, poruszamy problem wyznaczenia maksymalnej liczby indukowanych podgrafów izomorficznych do zadanego grafu, zarówno w przypadku grafów nieskierowanych jak i zorientowanych. Prowadzi to do parametru grafowego zwanego indukowalnością. Wnosimy wkład w rozważania poprzez poprawienie ograniczenia dolnego na kompresyjność 4-wierzchołkowej ścieżki oraz poprzez dokładne lub przybliżone wyznaczenie indukowalności wszystkich grafów zorientowanych na czterech wierzchołkach.