dr hab. Andrzej Biś, prof. UŁ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 28 września 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
Rouzbeha Mohseniego „Integrability, Foliations and Twistors"

Rozprawa doktorska Pana Rouzbeha Mohseniego w znacznej części dotyczy przeniesienia klasycznej teorii twistorów na przestrzenie sfoliowane, ostatni rozdział rozprawy poświęcony jest całkowalności pewnych układów dynamicznych przy wykorzystaniu metod pochodzących z różniczkowej teorii Galois. Powyższe dwie części rozprawy nie są ze sobą bezpośrednio związane, ale dotyczą aktualnie badanych zagadnień fizyki teoretycznej. Rozprawa liczy 78 stron, składa się z czterech rozdziałów i bibliografii (78 pozycji).

Za początek teorii twistorów można przyjąć prace Penrosa z 1967 roku, której wyniki stosowane są obecnie w geometrii różniczkowej i całkowej, teorii reprezentacji oraz w fizyce teoretycznej. Teoria Penrosa była i jest nadal intensywnie rozwijana. W 1978 r. Atiyah, Hitchin i Singer przenieśli ją na 4-wymiarową zorientowaną rozmaitość riemannowską (M,g), wówczas przestrzenią twistorową jest S2-wiązka Z nad M, zaś twistor t z Z to struktura zespolona na odpowiedniej przestrzeni stycznej, zgodna zarówno z metryką jak i orientacją. W wymiarze 4 algebra Liego grupy SO(4) rozpada się na mniejsze podalgebry, co pozwala uzyskać ciekawe zależności między geometrią rozmaitości (M,g) a jej przestrzenią twistorów. W 1985 O'Brian and Rawley uogólnili definicje twistorów na przypadek orientowalnej riemannowskiej rozmaitości parzystego wymiaru.

W rozdziale pierwszym rozprawy Pan Mohseni wprowadza podstawowe definicje i własności dotyczące zespolonych rozmaitości oraz grupy SO(2n)/U(n), które wykorzystuje w dalszej części pracy. Definiuje również klasyczną przestrzeń twistorów na rozmaitości riemannowskiej (M,g) wymiaru 2n, jako wiązkę nad M z włóknem Z(n) oraz grupą SO(2n).

W drugim rozdziale Pan Mohseni szczegółowo opisuje klasyczną teorie twistorów. Przedstawia przestrzeń twistorów na subwiązce wiązki TM rozmaitości riemannowskiej (M,g), z włóknami parzystego wymiaru. Wprowadza foliacje rozmaitości poprzez kocykle oraz szczegółowo opisuje konstrukcje twistorów na przestrzeniach sfoliowanych. Dokładniej, doktorant bada riemannowską foliację (M,F) rozmaitości M wraz z trzema wiązkami: wiązką styczną TM , wiązką styczną do foliacji TF oraz wiązką normalną TM/TF. Na przestrzeni sfoliowanej (M,F) rozpatruje trzy przestrzenie twistorowe Z(M), Z(F) oraz Z(M,F) będące endomorfizmami powyższych trzech wiązek. Przedstawia własności odwzorowań harmonicznych oraz holomorficznych między rozmaitościami riemannowskimi oraz bada ich uogólnienia na riemannowskich przestrzeniach sfoliowanych wyposażonych w transversalne prawie zespolone struktury. W tym języku, w Twierdzeniu 7 podaje warunek na to kiedy transwersalnie holomorficzne odwzorowanie między dwoma sfoliowanymi prawie Hermitowskimi rozmaitościami jest transwelsalnie harmoniczne. Najważniejszy wynik tego rozdziału to Twierdzenie 9, będące charakteryzacją harmoniczności na riemannowskiej foliacji rozmaitości.

A. Biś

Rozdział trzeci rozprawy dotyczy orbifoldów. Orbifoldy, wprowadzone przez Satake'go jako V-rozmaitości, stanowią jedno z najprostszych uogólnień rozmaitości, które dopuszcza singularności. Z pracy Borzelino i Brunsdena wynika, że dowolny gładki orbifold można wyposażyć w gładką riemannowską strukturę (w sensie orbifoldu), co pozwala badać zależności między przestrzeniami sfoliowanymi a orbifoldami. Doktorant dowodzi (Proposition 7), że przestrzeń liści riemannowskiej foliacji, o wszystkich liściach zwartych, ma naturalną strukturę orbifoldu. Niektóre z pojęć, omawianych w rozdziale drugim, można uogólnić na przypadek orbifoldów. W szczególności, Pan Mohseni definiuje i bada odwzorowanie harmoniczne między dwoma riemannowskimi orbifoldami. Uzyskuje odpowiedniki swoich wyników z rozdziału drugiego, wyrażone w języku orbifoldów. Szczególnie podobało mi się Twierdzenie 8 (z tego rozdziału), które mówi o tym, że odwzorowanie holomorficzne między dwoma prawie hermitowskimi orbifoldami (przy pewnych dodatkowych ale naturalnych założeniach o tych orbifoldach) jest harmoniczne. Naturalną konsekwencją metod i twierdzeń opisanych w dwóch pierwszych rozdziałach jest wynik (Proposition 8) mówiący, że przestrzeń twistorów riemannowskiego orbifoldu jest rozmaitością. Rozdział kończą uwagi o zastosowaniach orbifoldów i foliacji w teorii strun i ich związkach z rozmaitościami Calabi-Yau.

Czwarty i ostatni rozdział pracy odbiega tematycznie od trzech pierwszych. Jest dobrym wprowadzeniem do teorii Picarda-Vessiota, czyli różniczkowej teorii Galois zastosowanej do równań różniczkowych. Składa się z komentarzy autora ale nie zawiera twierdzeń udowodnionych przez doktoranta. Nie bardzo rozumiem dlaczego ten ten rozdział został włączony do rozprawy.

Na rozprawę doktorską składają się trzy artykuły, opublikowane w dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, oraz jeden preprint. Dwa z tych czasopism (SIGMA oraz Internat. J. Math.) znam i cenię za utrzymywanie wysokiego poziomu opublikowanych w nich prac.

Podsumowując, doktorant opanował, z dużą biegłością, metody przynależne do geometrii zespolonej, klasycznej teorii twistorów oraz teorii foliacji. Otrzymał nowe, nietrywialne wyniki, ciekawe zarówno dla matematyków zajmujących się naukowo foliacjami jak i teorią twistorów. W dowodach twierdzeń nie zauważyłem błędów. Zarówno teoria foliacji i jak i twistorów jest obecnie przedmiotem intensywnych badań naukowych zarówno matematyków jak i fizyków teoretycznych. Sfoliowana teoria twistorów, przedstawiona w rozprawie przez doktoranta, wskazuje nowe kierunki i otwiera możliwość dalszych ciekawych badań naukowych.

Wartość merytoryczną rozprawy oceniam bardzo wysoko. Rozprawa jest dość dobrze zredagowana, nieliczne literówki (na przykład: str. 4/17 jest obifold zamiast orbifold; str 10/11 jest det(A)=I zamiast det(A)=1) nie wpływają na ocenę całej rozprawy

Moim zdaniem rozprawa spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie Pana Rouzbeha Mohseniego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Andrzej Biś