



Prof. dr hab. dr h.c. Krzysztof Redlich
krzysztof.redlich@uwr.edu.pl
phone: +48 510 05 0835

Data: 28/10/ 2022

**Ocena pracy doktorskiej pana mgra Adama Wyrzykowskiego
„Local spin description of fermions on the lattice”**

Przedstawiona praca doktorska pana magistra Adama Wyrzykowskiego dotyczy zagadnienia bozonizacji, techniki, która pozwala na mapowanie pól fermionowych na bozonowe w układach kwantowych. Procedura bozonizacji jest dobrze znana i badana w fizyce, a jej sukces, dotyczy głównie rozwiązań układów jednowymiarowych. Tym niemniej, sformułowanie bozonizacji sieciowych teorii fermionów w dwu- i w wyższych-wymiarach jest ostatnio przedmiotem licznych publikacji, a zatem tematyka pracy jest aktualna.

Odwzorowanie fermionowych stopni swobody na spinowe w układach jedno-wymiarowych jest zadane poprzez dobrze znaną transformację Jordana-Wignera, która konstytuuje dualność kinematyczną swobodnego Hamiltonianu w opisie fermionowym i spinowym. Wprawdzie uogólnienie tej transformacji do wyższych wymiarów jest formalnie możliwe, tym niemniej prowadzi do nielokalnego Hamiltonianu spinowego, w którym pojawiają się nietrywialne korelacje. Z tego też względu zastosowanie transformacji Jordana-Wignera w wyższych wymiarach jest raczej niepraktyczne.

W ostatnich latach zaproponowano kilka sposobów bozonizacji zachowujących lokalność teorii spinowej, które mogą być także stosowane w wyższych wymiarach.

Jednym z takich schematów bozonizacji, który został podjęty w pracy mgr. Wyrzykowskiego, był ten zaproponowany przez Jacka Wośka (Acta. Phys. Pol. 1982) i rozwijany w pracach Andrzeja Szczerby (Comm. Math. Phys. 1985), A. Bochniak and B. Ruba (JHEP 2020) i innych. W tym przypadku proces bozonizacji sieciowego Hamiltonianu polega na przejściu od fermionowych operatorów kreacji i anihilacji do zmiennych Clifforda, które są następnie mapowane na macierzowe zmienne spinowe zachowując tę samą algebrę Clifforda operatorów „łącznikowych”. W przypadku jedno i dwuwymiarowych sieci, taka transformacja zachodzi odpowiednio poprzez macierze Pauliego i euklidesowe macierze Diraca. Rozszerzenie do d - wymiarów jest także możliwe poprzez wybór macierzy będących 2^d wymiarową reprezentacją algebry Clifforda.

Wprawdzie powyższy schemat bozonizacji pokazuje formalną równoważność Hamiltonianów, tym niemniej, nie jest to ekwiwalentne dualności opisu fermionowego i spinowego. Widać to chociażby na poziomie wymiarów przestrzeni Hilberta. Na 2-dim sieci, $N = L_x \times L_y$, przestrzeń fermionowa jest 2^N , natomiast spinowa, 4^N – wymiarowa, co wymaga narzucenia dalszych więzów w tej przestrzeni.

W przedstawionej pracy, pan mgr Wyrzykowski wyprowadził i opisał zbiór więzów, który należy rozwiązać w spinowej przestrzeni Hilberta. Są one związane z własnościami operatorów zamkniętych pętli na sieci, plakietek $P(n)$ oraz linii Polyakova L_x oraz L_y . Równoważność opisu wymaga aby powyższe operatory wykazywały te same własności, bez względu na to czy są one obliczone w zmiennych spinowej czy fermionowych. Okazało się jednak, że tak nie jest co doprowadziło do zdefiniowania operatorów rzutowania w zmiennych $P(n)$, L_x oraz L_y , które zostały wykorzystane w przestrzeni spinowej w celu redukcji jej wymiarów i usunięcia nadmiarowych stopni swobody.

Jak pokazał pan mgr Wyrzykowski, takich więzów jest w ogólności $N+2$, ale tylko N z nich jest niezależnych. Ponadto relacje między więzami zależą od rozmiarów sieci oraz warunków brzegowych, zarówno w zmiennych spinowych jak i fermionowych. Dodatkowo, warunek zachowania parzystości dla stanów p-cząstkowych narzuca relacje między rozmiarami sieci oraz warunkami brzegowymi. Wszystkie ważne relacje zostały szczegółowo wyprowadzone i obliczone w pracy, co było konieczne do znalezienia zredukowanej spinowej przestrzeni Hilberta oraz Hamiltonianu i jego wartości własnych. W tym kontekście ciekawy jest wynik, że na dwuwymiarowych sieciach o wymiarach parzystych rozwiązanie więzów istnieje tylko dla stanów o parzystej liczbie cząstek.

Aby rozwiązać problem więzów i określić zredukowaną przestrzeń Hilberta w reprezentacji spinowej, pan mgr Wyrzykowski wprowadził szereg ciekawych i oryginalnych rozwiązań. Po pierwsze zaproponował odpowiednią bazę oraz schemat jej implementacji w postaci algorytmu w programie Mathematica Wolframa. Następnie skonstruował w tej bazie operatory rzutowania związane z ograniczeniami narzucenymi przez własności plakietek oraz linii Polyakova. Tutaj istotną obserwacją był fakt, że problem można ograniczyć do p-cząstkowych sektorów, a właściwie do ich podprzestrzeni, które są niezmiennicze ze względu na działanie więzów. Taka koncepcja pozwoliła na niezależne rozwiązanie więzów w każdej z takich podprzestrzeni, przy jednoczesnej redukcji wymiarów macierzy operatorów rzutowania. Uprościło to znacznie obliczenia i znalezienia wektorów bazowych fizycznej spinowej przestrzeni Hilberta.

Pan mgr Wyrzykowski, rozwiązał także problem bozonizacji dla 2-wymiarowego Hamiltonianu opisującego oddziaływanie fermionów z zewnętrznym stałym polem Z_2 . Okazało się, że rozwiązanie więzów w tym przypadku, zachodzi podobnie jak dla swobodnego Hamiltonianu, ale ze zmienionymi więzami. Wybierając szczególną postać zmiennych Z_2 , interpretowanych jako stałe pole magnetyczne, pan Wyrzykowski znalazł ścisłe rozwiązania więzów także i w tym interesującym przypadku.

Pan mgr Wyrzykowski przedstawił ściśle rozwiązania więzów i ich wzajemnych związków na sieciach o wymiarach 3×3 , 3×4 oraz 4×4 . Pokazał, że działanie każdego niezależnego operatora rzutowania redukuje wymiar przestrzeni dwukrotnie. Poprzez analizę działania więzów zweryfikował wyprowadzoną relację, która określa właściwy wybór warunków brzegowych na sieci.

Wybór rozmiarów sieci był także dobrze przemyślany. Okazuje się bowiem, że wzajemne zależności operatorów rzutowania zależą od tego czy te wymiary są parzyste czy nieparzyste. Obliczenia pokazały, że dwie linie Palykova są niezależne tylko dla parzystych rozmiarów sieci, natomiast jeżeli są one nieparzyste, to tylko $N-2$ operatorów plakietek jest niezależnych. Są to wyniki, które poprzez ściśle rozwiązania więzów, pozytywnie zweryfikowały oczekiwania teoretyczne.

Znalezienie pełnej bazy fizycznej przestrzeni Hilberta w reprezentacji spinowej oraz spinowego Hamiltonianu w tej bazie i jego diagonalizacja, pozwoliła panu mgr. Wyrzykowskiemu na obliczenie spektrum energii w różnych stanach p -cząstkowych. Postać macierzowa fizycznego Hamiltonianu spinowego obliczonego na 3×3 sieci została ciekawie przedstawiana graficznie dla różnych stanów p -cząstkowych. Interesujące jest także graficzne porównanie 1-cząstkowych Hamiltonianów spinowych obliczonych w przypadku swobodnym i w obecności stałego pola magnetycznego. Obliczone spektrum energii otrzymane poprzez diagonalizację Hamiltonianu spinowego jest przedstawione w pracy w postaci tabeli.

W reprezentacji fermionowej, wartości własne Hamiltonianu swobodnego jak i oddziałującego z zewnętrznym polem Z_2 zostały w pracy obliczone analitycznie, a także przedstawione graficznie.

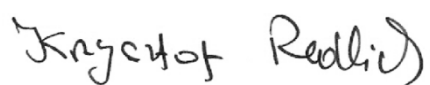
Pan mgr Wyrzykowski pokazał, że spektrum energii Hamiltonianu spinowego oraz fermionowego są identyczne na wszystkich rozważanych sieciach oraz dla wszystkich stanów p -cząstkowych. Jest to bardzo mocny i szczególnie wartościowy wynik. Pokazuje bowiem, że zaproponowana bozonizacja w oparciu o algebrę Clifforda konstituuje dualizm opisu fermionowego i spinowego. Zachodzi on w dwóch wymiarach, zarówno dla swobodnej teorii fermionów, jak i w przypadku ich oddziaływania z zewnętrznym polem Z_2 .

Otwartym pozostaje pytanie czy pokazany dualizm zachodzi również w trzech i wyższych wymiarach. Nie jest też jasne dla recenzenta czy i w jakim stopniu podejście i koncepcje rozwinięte w tej pracy będą pomocne w znalezieniu odpowiedzi na powyższe pytanie.

Omówione powyżej wybrane osiągnięcia i wyniki pana mgr. Wyrzykowskiego są szczegółowo opisane w przedstawionej pracy doktorskiej. Praca składa się z 6 rozdziałów oraz 4 uzupełnień i liczy 85 stron. Jest bardzo dobrze zredagowana i napisana z odpowiednim doбором i rozkładem prezentowanego materiału. Obliczenia i nowe koncepcje są jasno i wystarczająco szczegółowo przedstawione i omówione, wskazując na głębokie zrozumienie problemu i tematyki. Wartościowy i ważny jest także opis algorytmu, który posłużył autorowi do rozwiązania głównych problemów stawianych w tej pracy.

Wyniki pracy doktorskiej pana mgr. Wyrzykowskiego są już częściowo opublikowane w artykule, A. Bochniak, B. Ruba, J. Wosiek and A. Wyrzykowski (Phys. Rev. D102, 2020). Tym niemniej, uważam, że praca ta jest ważnym rozszerzeniem powyższego artykułu i może być niezależnie opublikowana.

Podsumowując, uważam, że przedstawiona praca pana mgr Adama Wyrzykowskiego spełnia wszystkie wymagania, w myśl obowiązującej Ustawy, stawiane pracom doktorskim. Stanowi ona oryginalny wkład do problemu bozonizacji układów fermionowych, dlatego też, w pełni popieram nadanie tytułu doktora nauk fizycznych panu Adamowi Wyrzykowskiemu.

Handwritten signature of Krzysztof Redlich in black ink.

Krzysztof Redlich