Artur Polański

IZOMETRYCZNE MODELE DLA GRUP Z METRYKĄ OBUSTRONNIE NIEZMIENNICZĄ

Rozprawa doktorska
napisana pod opieką
dr. hab. Piotra Niemca, prof. UJ

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki
i Informatyki
Kraków 2021

IZOMETRYCZNE MODELE DLA GRUP Z METRYKĄ OBUSTRONNIE NIEZMIENNICZĄ

ARTUR POLAŃSKI

Streszczenie. Udowodnimy, że dowolna grupa zwarta z metryką obustronnie niezmienniczą jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej zwartej przestrzeni metrycznej oraz, bardziej ogólnie, że każda grupa z metryką obustronnie niezmienniczą jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii (z metryką supremum) pewnej przestrzeni metrycznej.

Spis treści

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22A05; Secondary 22C05.
Key words and phrases. isometric; model; separable; group; compact.

1. Wstęp

W roku 1987, R. Saerens i W. R. Zame udowodnili w [6] następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 (Saerens, Zame)**.** *Niech G będzie zwartą grupą Liego. Istnieje wtedy zwarta rozmaitość riemannowska Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$*.*

Dużo później, w roku 2003, S. Gao i A. S. Kechris udowodnili w [1]:

Twierdzenie 2 (Gao, Kechris)**.** *Niech G będzie grupą polską. Istnieje wtedy polska przestrzeń metryczna Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$*.*

Po kilku latach, w 2008, J. Melleray udowodnił w [3], że:

Twierdzenie 3 (Melleray)**.** *Niech G będzie zwartą grupą metryzowalną. Istnieje wtedy zwarta przestrzeń metryczna Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$*.*

W roku 2009 M. Malicki i S. Solecki w [2] udowodnili między innymi, że:

Twierdzenie 4 (Malicki, Solecki)**.** *Niech G będzie lokalnie zwartą grupą polską. Istnieje wtedy przestrzeń z własnością Heinego-Borela Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$*.*

Wreszcie w roku 2013 P. Niemiec udowodnił w [4], że:

Twierdzenie 5 (Niemiec)**.** *Niech G będzie grupą polską (odpowiednio, zwartą grupą polską; lokalnie zwartą grupą polską). Istnieje wtedy metryka d na przestrzeni Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$*, gdzie $Y = l_2$ (odpowiednio, $Y = [0,1]^\omega$; $Y = [0,1]^\omega \setminus \{punkt\}$).*

Cel poniższych rozważań jest podobny, lecz zamiast pokazywać izomorfizmy grup topologicznych chcemy otrzymać izometryczne izomorfizmy dla grup metrycznych. Dokładnej, dla pewnej grupy topologicznej z metryką obustronnie niezmienniczą pytamy, czy jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej przestrzeni metrycznej, wyposażoną w metrykę supremum. Udowodnimy następujący wynik:

Twierdzenie 6. *Niech (G, ρ) będzie grupą wyposażoną w obustronnie niezmienniczą metrykę ρ. Wtedy istnieje przestrzeń metryczna (E, ν) taka, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z*

$$(\mathrm{Iso}(E, \nu), \nu_{\sup}).$$

Ponadto:

- *Dla dowolnego $u \in \mathrm{Iso}(E, \nu)$ mamy $\sup_{x \in E} \nu(u(x), x) < \infty$.*
- *Topologia zbieżności punktowej na $\mathrm{Iso}(E, \nu)$ pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej wyznaczonej przez ν.*
- *$w(E) = \max(\aleph_0, w(G))$.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E, ν) też.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zwarta, to (E, ν) też.*

Ze względu na dość skomplikowany charakter dowodu Twierdzenie zostanie rozbite na cztery części. Zaczniemy od najprostszego przypadku, gdy metryka ograniczona zadana jest na grupie ośrodkowej (Twierdzenie 7 poniżej). Przedstawione rozumowanie jest inspirowane dowodem twierdzenia Gao-Kechrisa zaprezentowanym przez P. Niemca w [4], gdzie dla ośrodkowej, zupełnej grupy metrycznej z metryką ograniczoną została skonstruowana przestrzeń, której izometrie odpowiadają mnożeniom z lewej strony przez elementy z wyjściowej grupy na zbiorze, na którym grupa działa w bardzo naturalny sposób. Konstrukcja przedstawiona poniżej opiera się na podobnej idei, jest jednak zmodyfikowana w taki sposób, żeby dla zwartej grupy G otrzymać zwartą przestrzeń E. W dalszej części opisujemy, w jaki sposób zmodyfikować ją jeszcze bardziej, aby otrzymać analogiczny wynik również dla grup z metrykami, które nie są ograniczone (Twierdzenie 8 poniżej). W dalszej części pracy skupiamy się na powtórzeniu tych wyników, ale już bez założenia ośrodkowości, odpowiednio w Twierdzeniu 9 w przypadku ograniczonym oraz w Twierdzeniu 10 w przypadku nieograniczonym, tutaj również konstrukcja inspirowana jest przypadkiem nieośrodkowym z [4]. Oczywiście, istnieją przykłady przestrzeni ośrodkowych, których grupy izometrii nie są ośrodkowe, pokazujemy więc w Twierdzeniu 11, że jeśli jakąś grupę możemy modelować jako grupę izometrii przestrzeni ośrodkowej, to dowolną jej podgrupę domkniętą również. W pracy celowo występują analogiczne oznaczenia oraz (do pewnego stopnia) lematy przedstawione w [4].

W sekcji 3 przedstawione są wyniki, które ukazały się w mojej pracy [5] (gdzie używam również notacji analogicznej do przedstawionej w sekcji 2), wzbogacone o dowody niektórych faktów, które w [5] zostały pozostawione czytelnikowi. Wyniki w sekcjach 4 oraz 5, mimo że są (dość naturalną) kontynuacją wyników przedstawionych w sekcji 3, nie są jeszcze opublikowane.

2. Notacja i terminologia

Znaczna część poniższej notacji została zapożyczona z [4]. W formie praktycznie niezmienionej jest też wykorzystywana w mojej pracy [5], gdzie omawiam przypadek ośrodkowy.

- Dla przestrzeni topologicznej X oraz funkcji $f : X \to X$ definiujemy $f^{ⓝ} : X^n \to X^n$ przez
$$f^{ⓝ}(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$
- Dla przestrzeni topologicznej X, punktu a oraz funkcji $f : X \to X$ definiujemy $f \times a : X \times \{a\} \to X \times \{a\}$ przez $(f \times a)(x, a) = (f(x), a)$.
- Dla przestrzeni metrycznej (X, d) oraz punktu $a \notin X$ definiujemy $d \times a : (X \times \{a\}) \times (X \times \{a\}) \to \mathbb{R}$ przez
$$(d \times a)((x, a), (y, a)) = d(x, y)$$
dla wszystkich $x, y \in X$.
- Dla przestrzeni metrycznej (X, d) oraz liczby naturalnej $n \geqslant 2$ definiujemy $d^{ⓝ}$ jako metrykę maksimum na X^n indukowaną przez d, to znaczy
$$d^{ⓝ}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{i=1}^{n} d(x_i, y_i).$$
- Dla przestrzeni topologicznych X oraz Y oznaczamy przez $X \sqcup Y$ sumę rozłączną X oraz Y. Dla rodziny zbiorów $\{X_s\}_{s \in S}$ oznaczamy jej sumę rozłączną przez $\bigsqcup_{s \in S} X_s$.
- Dla przestrzeni metrycznej (X, d) oraz niepustych zbiorów
$$A, B \subset X$$
przez $d(A, B)$ oznaczamy $\inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.
- Dla przestrzeni metrycznej (X, d) przez $\mathrm{Iso}(X, d)$ oznaczamy grupę izometrii przestrzeni X, czyli zbiór bijekcji φ ze zbioru

X w X takich, że $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ dla dowolnych punktów $x, y \in X$.
- Grupy izometrii, jeśli nie zostało napisane inaczej, są wyposażone w topologię zbieżności punktowej.
- Dla metryki d na niepustym zbiorze X, przez $d_{\sup}$ oznaczamy odległość supremum (z wartościami w $[0, \infty]$) na $\mathrm{Iso}(X, d)$ indukowaną przez d.
- Jeśli $\mathrm{Iso}(X, d)$ rozważamy z topologią jednostajną (indukowaną przez d), piszemy $(\mathrm{Iso}(X, d), d_{\sup})$.
- Dla uproszczenia zapisu będziemy używać oznaczeń $m \vee n = \max\{n, m\}$ oraz $m \wedge n = \min\{m, n\}$ dla $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$.
- Dla uproszczenia zapisu, jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $Y \subset X$, przez $d|_Y$ będziemy oznaczać metrykę d zawężoną do Y (zamiast $d|_{Y \times Y}$).

Istotny dla nas będzie też następujący fakt.

Obserwacja 1. Jeśli funkcja $d_{\sup}$ na $\mathrm{Iso}(X, d)$ przyjmuje wyłącznie wartości skończone, jest obustronnie niezmienniczą metryką na tej grupie.

Pokażemy, że każda grupa z metryką obustronnie niezmienniczą jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii wyposażoną w metrykę supremum.

3. Przypadek ośrodkowy

Zaczniemy od lematu z pracy [4].

Lemat 1. *Niech $\{(X_s, d_s)\}_{s \in S}$ będzie niepustą rodziną przestrzeni metrycznych taką, że dla $A = \bigcap_{s \in S} X_s$ mamy:*
- *$X_s \cap X_{s'} = A$ oraz $d_s|_A = d_{s'}|_A$ dla każdych dwóch różnych indeksów $s, s' \in S$;*
- *Zbiór A jest niepusty oraz domknięty w (X_s, d_s) dla każdego $s \in S$.*

Niech $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ oraz $d : X \times X \to [0, \infty)$ będzie określone przez reguły:
- *d pokrywa się z d_s na $X_s \times X_s$ dla każdego $s \in S$;*
- *$d(x, y) = \inf \{d_s(x, a) + d_{s'}(a, y) | a \in A\}$ dla $x \in X_s \setminus X_{s'}$, $y \in X_{s'} \setminus X_s$, dla każdych dwóch różnych indeksów $s, s' \in S$.*

Wtedy d jest dobrze zdefiniowaną metryką na X o następującej własności: Dla rodziny odwzorowań $f_s \in \mathrm{Iso}(X_s, d_s)(s \in S)$ takiej, że $f_s|_A = f_{s'}|_A$ oraz $f_s(A) = A$ dla dowolnych $s, s' \in S$, ich sklejenie $f := \bigcup_{s \in S} f_s$ (to znaczy, $f = f_s$ na X_s) jest dobrze zdefiniowaną funkcją taką, że $f \in \mathrm{Iso}(X, d)$.

Lemat ten będzie jednym z najważniejszych narzędzi wykorzystywanych w konstrukcji. W cytowanej pracy był on podany bez dowodu, załączamy więc własny dowód dla kompletności.

Dowód. Wprost z definicji dostajemy symetrię oraz własność $d(x, x) = 0$ dla dowolnego $x \in X$. Mamy też $d(x, y) > 0$ dla $x \in X_s \setminus X_{s'}$, $y \in X_{s'} \setminus X_s$, $s \neq s'$ również z definicji oraz domkniętości A. Nierówność $d(x, y) > 0$ zachodzi też dla dowolnych $x, y \in X$ o ile $x \neq y$ w pozostałych przypadkach, ponieważ d_s jest metryką dla każdego $s \in S$.

Przechodzimy do sprawdzenia nierówności trójkąta.

Niech $x \in X_s$, $y \in X_{s'}$ oraz $z \in X_{s''}$ dla pewnych $s, s', s'' \in S$.

Jeśli $s = s' = s''$, nierówność trójkąta przenosi się wprost z nierówności trójkąta dla d_s.

Jeśli $s = s'$ oraz $s' \neq s''$, dla dowolnego $b \in A$ mamy

$$d(x, z) = \inf \{d_s(x, a) + d_{s''}(a, z) | a \in A\} \leqslant d_s(x, b) + d_{s''}(b, z) \leqslant$$

$$\leqslant d_s(x, y) + d_s(y, b) + d_{s''}(b, z) = d_s(x, y) + d_{s'}(y, b) + d_{s''}(b, z).$$

Przechodząc do infimum z $b \in A$ dostajemy $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Przypadek $s \neq s'$ oraz $s' = s''$ jest symetryczny.

Pozostaje przypadek, gdzie $s \neq s'$ oraz $s' \neq s''$. Jeśli $s = s''$, to $d(x, z) \leqslant \inf \{d_s(x, a) + d_{s''}(a, z) | a \in A\}$ z nierówności trójkąta dla d_s. Jeśli $s \neq s''$, to z definicji d zachodzi równość $d(x, z) = \inf \{d_s(x, a) + d_{s''}(a, z) | a \in A\}$, więc w szczególności również słaba nierówność. Dla dowolnych $b, c \in A$ zachodzi więc

$$d(x, z) \leqslant \inf \{d_s(x, a) + d_{s''}(a, z) | a \in A\} \leqslant d_s(x, b) + d_{s''}(b, z) \leqslant$$

$$\leqslant d_s(x, b) + d_{s''}(b, c) + d_{s''}(c, z) = d_s(x, b) + d_{s'}(b, c) + d_{s''}(c, z) \leqslant$$

$$\leqslant d_s(x, b) + d_{s'}(b, y) + d_{s'}(y, c) + d_{s''}(c, z).$$

Przechodząc do infimum po $b \in A$, $c \in A$ dostajemy

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z),$$

co kończy dowód nierówności trójkąta.

Rozważmy teraz rodzinę odwzorowań $f_s \in \mathrm{Iso}(X_s, d_s)(s \in S)$ jak w wypowiedzi. Z własności $f_s|_A = f_{s'}|_A$ (dla $s, s' \in S$) mamy, że f jest dobrze zdefiniowana, ponieważ $f_s(A) = A$ (dla $s \in S$), f jest też bijekcją. Pozostaje sprawdzić zachowywanie odległości. Dla dowolnych $x \in X_s \setminus A$, $y \in X_{s'} \setminus A$ mamy

$$d(x, y) = \inf \{d_s(x, a) + d_{s'}(a, y) | a \in A\}$$

oraz

$$d(f(x), f(y)) = \inf \{d_s(f(x), b) + d_{s'}(b, f(y)) | b \in A\}.$$

Ponieważ f jest bijekcją i $f(A) = A$, zbiory $\{b|b \in A\}$ oraz $\{f(a)|a \in A\}$ są równe. Ponadto $f_s(X_s \setminus A) = X_s \setminus A$ dla każdego $s \in S$ oraz f_s zachowuje odległość dla każdego $s \in S$, mamy więc, że $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, co kończy dowód.

$\square$

Aby uniknąć powtarzania, wprowadzamy też następującą definicję (por. [4]).

Definicja 1. Dla przestrzeni metrycznej X, odwzorowania $v : X \to X$ oraz przestrzeni $Y \subset (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n, k)\})) \sqcup (\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\}$, przez $\widehat{v} : Y \to Y$ oznaczamy odwzorowanie takie, że

- $\widehat{v}|_{Y \cap (X \times \{(n,k)\})} = [v \times (n, k)]\,|_{Y \cap (X \times \{(n,k)\})}$ dla każdych $n \geqslant k \geqslant 1$;
- $\widehat{v}|_{Y \cap X^i} = v^{\textcircled{i}}|_{Y \cap X^i}$;
- $\widehat{v}(\omega) = \omega$;
- $\widehat{v}(\alpha) = \alpha$.

Sekcja ta będzie podzielona na dwie główne części. W pierwszej skoncentrujemy się na przypadku metryki ograniczonej (oczywiście, mieści się tu przypadek zwarty). W drugiej części opisujemy, co zmienić, aby otrzymać analogiczny wynik dla przypadku nieograniczonego. Wyniki z obu podsekcji ukazały się w mojej pracy [5].

3.1. **Przypadek ośrodkowy, ograniczony.** Lemat, od którego zaczniemy przypadek ośrodkowy, jest wariacją Lematu 2.4 z pracy [4], przeprowadzamy jednak konstrukcję nieco inaczej, aby otrzymać więcej własności (np. zwartość).

Lemat 2. *Niech* (X,ρ) *będzie niepustą przestrzenią metryczną taką, że* $\rho \leqslant 1$. *Wtedy istnieje metryka* λ *na*

$$F := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\})\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i\right) \sqcup \{\omega\}$$

taka, że:

(a) $\lambda \leqslant 12$.
(b) *Dla każdego* $u \in \operatorname{Iso}(X,\rho)$ *odwzorowanie* $\widehat{u} : F \to F$ *należy do* $\operatorname{Iso}(F,\lambda)$.
(c) *Jeśli* $g \in \operatorname{Iso}(F,\lambda)$ *spełnia warunek* $g(X \times \{(n,k)\}) = X \times \{(n,k)\}$ *dla wszystkich* $n \geqslant k \geqslant 1$ *oraz* $g(X^n) = X^n$ *dla wszystkich* $n > 1$, *to istnieje* $u \in \operatorname{Iso}(X,\rho)$ *takie, że* $g = \widehat{u}$.
(d) *Jeśli* (X,ρ) *jest zupełna, to* (F,λ) *również.*
(e) *Jeśli* (X,ρ) *jest zwarta, to* (F,λ) *również.*
(f) $\lambda|_{X\times\{(n,k)\}}$ *pokrywa się z* $\frac{\rho\times(n,k)}{2^n}$ *dla wszystkich* $n \geqslant k \geqslant 1$ *oraz* $\lambda|_{X^n}$ *pokrywa się z* $\frac{\rho^{(n)}}{2^n}$ *dla wszystkich* $n > 1$.
(g) *Dla* $u, v \in \operatorname{Iso}(X,\rho)$ *mamy* $\rho_{\sup}(u,v) = 2\lambda_{\sup}(\widehat{u},\widehat{v})$.

Dowód. W całym dowodzie traktujemy zbiory $X \times \{(n,k)\}$, X^n, $\{\omega\}$ jako parami rozłączne. Metrykę λ będziemy wprowadzać używając Lematu 1, wszystkie metryki wprowadzone pomocniczo w dowodzie na podzbiorach F należy traktować jako metryki na podzbiorach jednego ustalonego zbioru, które w szczególności mogą się ze sobą nietrywialnie przecinać. Zaczniemy od zdefiniowania λ_A na zbiorze $A := (X \times \{(1,1)\}) \sqcup (\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i) \sqcup \{w\}$. Rozważmy zbiór $B \subset A$ składający się z $X \times \{(1,1)\}$, punktu ω oraz punktów ze wszystkich X^n o wszystkich współrzędnych równych sobie (leżących na przekątnych). Dla uproszczenia zdefiniujmy $x^{(1)} := (x,(1,1)) \in X \times \{(1,1)\}$ oraz $x^{(i)} := (x,\ldots,x) \in X^i$ dla wszystkich $x \in X$, $i \geqslant 2$. Definiujemy λ_B na B przez:

- $\lambda_B(x^{(i)}, y^{(i)}) = \frac{\rho(x,y)}{2^i}$ dla wszystkich $x, y \in X$, $i \geqslant 1$;
- $\lambda_B(x^{(i)}, y^{(j)}) = \lambda_B(y^{(j)}, x^{(i)}) = \frac{\rho(x,y)}{2^j} + \sum_{\iota=i-1}^{j-2} \frac{1}{2^\iota}$ dla wszystkich $x, y \in X$, $j > i \geqslant 1$;
- $\lambda_B(x^{(i)}, \omega) = \lambda_B(\omega, x^{(i)}) = \sum_{\iota=i-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota}$ dla wszystkich $x \in X$, $i \geqslant 1$.

Pomocna dla lepszego zrozumienia definicji λ_B może być wizualizacja konstrukcji z niej wynikającej jako "wieży", której "piętrami" są kolejne potęgi X, przy czym każde kolejne "piętro" ma dwa razy mniejszą średnicę niż poprzednie, a odległość między dwoma sąsiednimi "piętrami" jest dwa razy większa, niż średnica większego z nich. Powoduje to, że cała "wieża" przypomina ułożone w kształt stożka coraz bliższe sobie potęgi X, przeskalowane przez coraz mniejsze stałe, z dorzuconym wierzchołkiem ω.

Jedyną nietrywialną częścią sprawdzenia, że λ_B jest metryką jest nierówność trójkąta. Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenia $x^{\textcircled{\infty}} = \omega$, $c_\infty = 0$ oraz $c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ dla dowolnego $k \geqslant 0$. Wtedy λ_B można opisać równoważnie jako

$$\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{j}}) = c_{i\vee j}\rho(x,y) + 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j}).$$

Nierówność trójkąta dla λ_B sprowadza się więc do sprawdzenia, że dla dowolnych $x, y, z \in X$, $i, j, k \geqslant 1$ zachodzi

$$\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, z^{\textcircled{k}}) \leqslant \lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{j}}) + \lambda_B(y^{\textcircled{j}}, z^{\textcircled{k}}),$$

czyli

$$\begin{gathered} c_{i\vee k}\rho(x,z) + 4(c_{i\wedge k} - c_{i\vee k}) \leqslant c_{i\vee j}\rho(x,y) + \\ +4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j}) + c_{j\vee k}\rho(y,z) + 4(c_{j\wedge k} - c_{j\vee k}). \end{gathered}$$

Przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$\begin{gathered} c_{i\vee k}\rho(x,z) - c_{i\vee j}\rho(x,y) - c_{j\vee k}\rho(y,z) \leqslant \\ \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_{j\wedge k} - c_{j\vee k} - c_{i\wedge k} + c_{i\vee k}). \end{gathered}$$

Ponieważ $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ wystarczy pokazać, że

$$\begin{gathered} (c_{i\vee k} - c_{i\vee j})\rho(x,y) + (c_{i\vee k} - c_{j\vee k})\rho(y,z) \leqslant \\ \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_{j\wedge k} - c_{j\vee k} - c_{i\wedge k} + c_{i\vee k}). \end{gathered}$$

Otrzymane wyrażenie jest symetryczne ze względu na i oraz k, bez straty ogólności możemy więc założyć, że $i \leqslant k$. Dostajemy

$$\begin{gathered} (c_k - c_{i\vee j})\rho(x,y) + (c_k - c_{j\vee k})\rho(y,z) \leqslant \\ \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_{j\wedge k} - c_{j\vee k} - c_i + c_k). \end{gathered}$$

Rozważamy przypadki. Jeśli $j \leqslant k$, dostajemy

$$(c_k - c_{i\vee j})\rho(x,y) + (c_k - c_k)\rho(y,z) \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_j - c_k - c_i + c_k)$$

$$(c_k - c_{i\vee j})\rho(x,y) \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_j - c_i). \tag{$*$}$$

Ponieważ $i, j \leqslant k$, mamy $(c_k - c_{i\vee j}) \leqslant 0$. Z drugiej strony prawa strona $(*)$ wynosi $4(|c_j - c_i| + c_j - c_i)$, czyli jest nieujemna. W połączeniu z faktem, że lewa strona jest niedodatnia, dostajemy $(*)$.

Pozostaje przypadek $k < j$. Ponieważ założyliśmy, że $i \leqslant k$, mamy $i \leqslant k < j$. Nierówność ma wtedy postać

$$(c_k - c_j)\rho(x,y) + (c_k - c_j)\rho(y,z) \leqslant 4(c_i - c_j + c_k - c_j - c_i + c_k)$$

$$(c_k - c_j)\rho(x,y) + (c_k - c_j)\rho(y,z) \leqslant 4(2c_k - 2c_j).$$

Ponieważ $c_k > c_j$, jest to równoważne

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) \leqslant 8,$$

co zachodzi, ponieważ ρ jest ograniczone przez 1. Kończy to dowód nierówności trójkąta.

Mamy więc, że λ_B jest metryką. Zauważmy, że dla dowolnego $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$, odwzorowanie $\widehat{u}$ spełnia $\widehat{u}|_B \in \mathrm{Iso}(B,\lambda_B)$. Zauważmy, że dla dowolnego $k \in \{2,3,4,\ldots\}$ zachodzi $X^k \cap B = \{x^{(k)} : x \in X\}$. Możemy więc zastosować Lemat 1 do pary przestrzeni $\left(X^k, \frac{\rho^{(k)}}{2^k}\right)$ oraz (B,λ_B), aby otrzymać (B_k,λ_k) takie, że $B_k = X^k \cup B$, metryka λ_k pokrywa się z λ_B na B oraz z $\frac{\rho^{(k)}}{2^k}$ na X^k. Stosując ponownie Lemat 1 do rodziny $\{(B_k,\lambda_k)\}_{k\in\{2,3,4,\ldots\}}$ otrzymujemy metrykę λ_A na A pokrywającą się z $\frac{\rho}{2}\times(1,1)$ na $X\times\{(1,1)\}$ oraz z $\frac{\rho^{(k)}}{2^k}$ na X^k dla wszystkich $k \in \{2,3,4,\ldots\}$. Zauważmy, że dla dowolnego $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ również mamy $\widehat{u}|_A \in \mathrm{Iso}(A,\lambda_A)$ (z Lematu 1) oraz $\lambda_A(X^{k_1}, X^{k_2}) = \sum_{\iota=k_1-1}^{k_2-2} \frac{1}{2^\iota}$ dla $1 \leqslant k_1 < k_2$ (utożsamiamy tu X^1 z $X \times \{(1,1)\}$). Zauważmy także, że

$$\lambda_A((x,(1,1)),(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota} \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = x \tag{1}$$

dla wszystkich $n \geqslant 2$. Dla każdego $n \geqslant 2$ oraz $k \leqslant n$ określmy teraz metrykę $\lambda_{n,k}$ na $X_{n,k} := (X \times \{(n,k)\}) \sqcup X^n$ pokrywającą się z $\frac{\rho}{2^n} \times (n,k)$ na $X \times \{(n,k)\}$, z $\frac{\rho^{(n)}}{2^n}$ na X^n oraz spełniającą

$$\lambda_{n,k}((x,(n,k)),(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{1+\rho(x,x_k)}{2^n}$$

dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, x \in X$ ($\lambda_{n,k}$ jest metryką, ponieważ $\frac{\rho}{2^n}$ oraz $\frac{\rho^{(n)}}{2^n}$ są ograniczone przez $\frac{1}{2^n}$). Jak poprzednio zauważmy, że

$$\lambda_{n,k}((x,(n,k)),(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow x_k = x \tag{2}$$

dla dowolnych $n \geqslant 2$ oraz $k \leqslant n$. Teraz dla dowolnego $n \geqslant 2$ stosujemy Lemat 1 do rodziny $\{(A,\lambda_A)\} \cup \{(X_{n,k},\lambda_{n,k})\}_{k=1}^n$, aby otrzymać λ_n^* na $A_n := A \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n X \times \{(n,k)\}$, rozszerzające λ_A oraz każde z $\lambda_{n,k}$ dla wszystkich $k \in \{1,\ldots,n\}$. Stosujemy ponownie Lemat 1 do rodziny $\{(A_n,\lambda_n^*)\}_{n\in\{1,2,3,\ldots\}}$ i otrzymujemy metrykę λ na F taką, że dla dowolnego $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ odwzorowanie $\widehat{u}$ jest w $\mathrm{Iso}(F,\lambda)$. Zachodzi więc warunek (b). Własność (f) wynika wprost z konstrukcji, natomiast (g) wynika z (f).

Zauważmy, że

- $\lambda_B \leqslant 2$,
- $\lambda_A \leqslant 5$,
- $\lambda_n^* \leqslant 6$ dla dowolnego $n \geqslant 2$,
- $\lambda \leqslant 12$,

czyli (a) również zachodzi. Można pokazać, że stałe ograniczające da się dobrać mniejsze, jednak dla naszych potrzeb nie jest istotne, jaką dokładnie dodatnią stałą rzeczywistą jest ograniczenie w (a).

Zwróćmy teraz uwagę na kilka własności λ wynikających wprost z konstrukcji, które będą przydatne w dowodach (d) i (e). Mamy

(i) $\lambda(X^n, F \setminus X^n) \geqslant \frac{1}{2^n}$ dla dowolnego $n \geqslant 2$,
(ii) $\lambda(X \times \{(n,k)\}, F \setminus (X \times \{(n,k)\})) \geqslant \frac{1}{2^n}$ dla dowolnych $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$,
(iii) dla dowolnego $x \in X^n$ zachodzi $\lambda(x,\omega) \leqslant \frac{1}{2^n} + \sum_{\iota=n-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota} \leqslant \frac{1}{2^{n-3}}$,
(iv) dla dowolnego $x \in X \times \{(n,k)\}$ zachodzi $\lambda(x,\omega) \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \sum_{\iota=n-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota} \leqslant \frac{1}{2^{n-3}}$.

W szczególności, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie zbiory $X^i \subset F$ dla $i \geqslant 2$ oraz prawie wszystkie zbiory $X \times \{(n,k)\} \subset F$ dla $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$ zawierają się w kuli o środku w ω i promieniu ε.

Załóżmy teraz, że (X,ρ) jest zupełna i rozważmy ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=0}^\infty$ w F. Przypomnijmy, że $F = (\bigsqcup_{n=1}^\infty \bigsqcup_{k=1}^n (X \times \{(n,k)\})) \sqcup (\bigsqcup_{i=2}^\infty X^i) \sqcup \{\omega\}$. Z (iii) i (iv) wynika więc, że albo prawie wszystkie elementy $(x_n)_{n=0}^\infty$ są w dowolnie zadanym otoczeniu punktu ω, czyli ciąg jest zbieżny do ω, albo nieskończenie wiele z jego elementów jest w pewnym $X \times \{(n,k)\}$ lub X^i. Jeśli nieskończenie wiele z jego elementów zawiera się w pewnym $X \times \{(n,k)\}$, to z definicji ciągu Cauchy'ego oraz z (ii), prawie wszystkie jego elementy są w zbiorze $X \times \{(n,k)\}$, który z metryką λ zawężoną do $X \times \{(n,k)\}$ jest przestrzenią zupełną, czyli ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny. Analogicznie w przypadku X^i, korzystając z (i) i definicji ciągu Cauchy'ego ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny. Stąd, jeśli (X,ρ) jest zupełna, to (F,λ) również, czyli warunek (d) jest spełniony.

Podobnie jeśli rozważymy ciąg $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ w F, albo prawie wszystkie jego elementy znajdują się w dowolnie zadanym z góry otoczeniu punktu ω, co powoduje, że jest on zbieżny do ω, albo nieskończenie wiele z nich jest w $X \times \{(n,k)\}$ lub X^i. Stąd, jeśli (X,ρ) jest zwarta, to (F,λ) również, czyli (e) zachodzi.

Pozostaje udowodnić (c). Niech $g \in \mathrm{Iso}(F,\lambda)$ spełnia określony tam warunek. Niech $u_{n,k} : X \times \{(n,k)\} \to X \times \{(n,k)\}$ będą takie, że $u_{n,k} \times (n,k) = g|_{X\times\{(n,k)\}}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ i niech $f_n : X^n \to X^n$ będzie takie, że $f_n = g|_{X^n}$ dla każdego $n \geqslant 1$. Ponieważ $\lambda|_{X\times\{(1,1)\}} = \frac{\rho\times(1,1)}{2}$, mamy $u_{1,1} \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$. Pokażemy, że $u_{n,k} = u_{1,1}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz, że $f_n = u_{1,1}^{(n)}$. Niech $\pi_{n,k} : X^n \to X$ będzie projekcją na k-tą współrzędną dla każdego $n \geqslant k \geqslant 1$. Dla dowolnego $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ mamy, dzięki (2):

$$\frac{1}{2^n} = \lambda((\pi_{n,k}(x),(n,k)),x) = \lambda(g(\pi_{n,k}(x),(n,k)),g(x)) =$$

$$= \lambda(((u_{n,k}\circ\pi_{n,k})(x),(n,k)),f_n(x))$$

więc, ponownie z (2), $u_{n,k}\circ\pi_{n,k} = \pi_{n,k}\circ f_n$ czyli $f_n(x_1,\ldots,x_n) = (u_{n,1}(x_1),\ldots,u_{n,n}(x_n))$. Podobnie, dla dowolnego $z \in X$ oraz $n \geqslant 2$ mamy, z (1),

$$\sum_{\iota=0}^{n-2}\frac{1}{2^\iota} = \lambda((z,(1,1)),z^{(n)}) = \lambda(g(z,(1,1)),g(z^{(n)})) =$$

$$= \lambda((u_{1,1}(z),(1,1)),(u_{n,1}(z),\ldots,u_{n,n}(z)))$$

czyli, ponownie z (1), dostajemy $u_{n,1} = \ldots = u_{n,n} = u_{1,1}$. Stąd $u_{n_1,k_1} = u_{n_2,k_2}$ dla wszystkich $n_1 \geqslant k_1 \geqslant 1$ oraz $n_2 \geqslant k_2 \geqslant 1$, co kończy dowód. $\square$

Obserwacja 2. Zauważmy, że jeśli (X, ρ) jest lokalnie zwarta, możemy otrzymać lokalnie zwartą przestrzeń (F, λ) powtarzając dowód z pominięciem punktu ω, ponieważ był on istotny tylko w dowodach (d) oraz (f), ponadto odległość dowolnego punktu różnego od ω od dowolnego innego z rozłącznej sumy w F jest większa od 0. Zauważmy też, że jeśli (X, ρ) jest lokalnie zwarta, niezwarta oraz ρ jest zupełna, możemy zmodyfikować $\lambda_B(x^{\textcircled{\imath}}, y^{\textcircled{\jmath}})$ w taki sposób, żeby dla dowolnych $i \neq j$ była zawsze ograniczona z dołu przez pewną stałą. Otrzymamy wtedy metrykę λ, która jest zupełna (w szczególności, w tym przypadku wystarczy powtórzyć konstrukcję wykonaną w [4]).

Kolejny lemat jest także odpowiednikiem jednego z lematów w pracy [4], konkretnie Lematu 2.5, który jest następstwem Lematu 2.4 w podobny sposób, w jaki poniższy Lemat 3 jest następstwem Lematu 2. Zanim jednak do niego przejdziemy, zwróćmy uwagę na kilka własności metryki λ otrzymanej w Lemacie 2.

Obserwacja 3. Niech (F, λ) będzie przestrzenią otrzymaną z Lematu 2 na podstawie pewnej przestrzeni (X, ρ). Niech $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2$, $k_1 \leqslant n_1$ oraz $k_2 \leqslant n_2$. Prawdziwe są wtedy następujące szacowania:

(a) $\lambda(X \times \{(n_1, k_1)\}, X \times \{(n_2, k_2)\}) \geqslant \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \sum_{\iota=n_1-1}^{n_2-2} \frac{1}{2^\iota}$ dla $(n_1, k_1) \neq (n_2, k_2)$,
(b) $\lambda(X \times \{(n_1, k_1)\}, X^{n_2}\}) \geqslant \frac{1}{2^{n_1}} + \sum_{\iota=n_1-1}^{n_2-2} \frac{1}{2^\iota}$,
(c) $\lambda(X^{n_1}, X \times \{(n_2, k_2)\}) \geqslant \frac{1}{2^{n_2}} + \sum_{\iota=n_1-1}^{n_2-2} \frac{1}{2^\iota}$,
(d) $\lambda(X^{n_1}, X^{n_2}) \geqslant \sum_{\iota=n_1-1}^{n_2-2} \frac{1}{2^\iota}$ dla $n_1 \neq n_2$,
(e) $\lambda(X \times \{(1, 1)\}, X^{n_1}) \geqslant \sum_{\iota=0}^{n_1-2} \frac{1}{2^\iota}$,
(f) $\lambda(X \times \{((1, 1)\}, X \times \{(n_1, k_1)\}\}) \geqslant \frac{1}{2^{n_1}} + \sum_{\iota=0}^{n_1-2} \frac{1}{2^\iota}$,
(g) $\lambda(\omega, X^{n_1}) = \sum_{\iota=n_1-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota}$,
(h) $2 \geqslant \frac{2}{2^{n_1}} + \sum_{\iota=n_1-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota} \geqslant \lambda(\omega, X \times \{(n_1, k_1)\}\}) \geqslant \frac{1}{2^{n_1}} + \sum_{\iota=n_1-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota}$,
(i) $\lambda(X \times \{(1, 1)\}, \omega) = \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{1}{2^\iota} = 2$.

Dowód. Dowód polega na dokładnym przyjrzeniu się konstrukcji λ w Lemacie 2 pod kątem tych nierówności. Podczas gdy metryka jest definiowana od metryki λ_B, która następnie jest kilkukrotnie rozszerzana aż do otrzymania metryki λ, analogony nierówności z niniejszej propozycji są prawdziwe również dla tych „pomocniczych” metryk, które rozszerzane są za pomocą Lematu 1 w taki sposób, że zachowana jest prawdziwość nierówności działających dla metryk w poprzednich krokach.

Z definicji λ_B w dowodzie Lematu 2 dostajemy od razu, że na podzbiorach X^n ($n \geqslant 2$), gdzie λ_B jest określona, spełnione są analogony (d), (e), (g) oraz (i). Metryka λ_A, która rozszerza λ_B i jest już określona na całym $\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i$, spełnia analogony tych samych podpunktów (już dla całych X^n), co wynika z definicji „sklejonej" metryki z Lematu 1. Następnym krokiem jest wprowadzenie metryk λ_n^* rozszerzających λ_A. Analogony podpunktów (d), (e), (g) oraz (i) dalej zachodzą (rozszerzenie metryk), dla dowolnego $n \geqslant 2$ oraz $k \leqslant n$ mamy również $\lambda_n^*(X^n, X \times \{(n,k)\}) = \frac{1}{2^n}$, co ponownie wynika z Lematu 1 i definicji metryk $\lambda_{n,k}$, których sklejeniem jest λ_n^*. Stąd dostajemy analogony (b) i (f) dla $\lambda_{n_1}^*$ oraz analogon (c) dla $\lambda_{n_2}^*$. Ponieważ odległość dowolnych dwóch punktów z $X \times (n,k)$ jest z góry ograniczona przez $\frac{1}{2^n}$, dostajemy dla $\lambda_{n_1}^*$ analogon (h). Metryka λ, jako sklejenie metryk λ_n^*, również spełnia własności od (b) do (i), już dla dowolnych n_1, n_2. Ostatnia własność, czyli (a), również wynika z odległości X^n od $X \times \{(n,k)\}$ oraz Lematu 1, co kończy dowód. $\square$

Lemat 3. *Niech (X,ρ) będzie niepustą przestrzenią metryczną taką, że $\rho \leqslant 1$ oraz niech G będzie domkniętą podgrupą $\mathrm{Iso}(X,\rho)$. Niech $(z_n)_{n=2}^{\infty} \subset \bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i$ będzie ciągiem punktów takim, że dla $n \geqslant 2$ mamy $z_n \in X^n$. Dla każdego $n \geqslant 2$ oznaczmy przez $D_n \subset X^n$ domknięcie (w X^n) zbioru $\{u^{ⓝ}(z_n) | u \in G\}$. Wtedy istnieje metryka μ na*

$$E := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\})\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i\right) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\}$$

taka, że:

- *(a)* $\mu < 16$.
- *(b) Dla każdego $u \in G$ odwzorowanie $\widehat{u} : E \to E$ jest w* $\mathrm{Iso}(E,\mu)$.
- *(c) Dla dowolnego $g \in \mathrm{Iso}(E,\mu)$ istnieje $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ takie, że $g = \widehat{u}$ oraz $u^{ⓝ}(z_n) \in D_n$ dla wszystkich $n \geqslant 2$.*
- *(d) Jeśli (X,ρ) jest zupełna, to (E,μ) też.*
- *(e) Jeśli (X,ρ) jest zwarta, to (E,μ) też.*
- *(f) $\mu|_{X\times\{(n,k)\}}$ pokrywa się z $\frac{\rho\times(n,k)}{2^n}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $\mu|_{X^n}$ pokrywa się z $\frac{\rho^{ⓝ}}{2^n}$ dla wszystkich $n > 1$.*
- *(g) Dla dowolnych $u, v \in G$ mamy $\rho_{\sup}(u,v) = 2\mu_{\sup}(\widehat{u},\widehat{v})$.*

Dowód. Zaczniemy od (F,λ), gdzie F oraz λ są takie, jak zdefiniowano w Lemacie 2. Pozostaje rozszerzyć metrykę λ na punkt α. Rozważmy

$E' = (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\})) \sqcup (\bigsqcup_{i=2}^{\infty} D_i) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\} \subset E$. Wybierzmy liczby $c_{n,k}$ dla $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$ takie, że

$$13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-3} \frac{1}{2^\iota}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < c_{n,1} < \ldots < c_{n,n} < 13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota}\right)$$

(zakładamy, że $\sum_{\iota=0}^{-1} \frac{1}{2^\iota} = 0$). Definiujemy μ' na E' jako metrykę rozszerzającą $\lambda|_{E' \setminus \{\alpha\}}$ taką, że:

- $\mu'(\alpha, x) = \mu'(x, \alpha) = c_{n,k} \Leftrightarrow x \in X \times \{(n,k)\}$,
- $\mu'(\alpha, x) = \mu'(x, \alpha) = 13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota}\right) \Leftrightarrow x \in D_n \subset X^n$,
- $\mu'(\alpha, x) = \mu'(x, \alpha) = 13 \Leftrightarrow x \in X \times \{(1,1)\}$,
- $\mu'(\alpha, \omega) = \mu'(\omega, \alpha) = 15 = 13 + \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{1}{2^\iota}$,

dla wszystkich $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$. W sprawdzeniu, że μ' jest metryką, jedyną nietrywialną częścią jest nierówność trójkąta. Zauważmy, że ponieważ μ' pokrywa się z λ na $E' \setminus \{\alpha\}$, wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta tylko w przypadkach, kiedy co najmniej jeden z rozważanych punktów to α. Rozważmy więc nierówność

$$\mu'(x,z) \leqslant \mu'(x,y) + \mu'(y,z)$$

dla pewnych $x, y, z \in E'$. Jeśli dokładnie dwa lub trzy rozważane punkty to α, nierówność się trywializuje. Pozostaje przypadek, kiedy dokładnie jeden z punktów x, y, z to α. Zauważmy, że dla dowolnych dwóch punktów z $E' \setminus \{\alpha\}$ ich odległość w metryce μ' jest mniejsza od $\mu'(\alpha, E' \setminus \{\alpha\})$. Stąd, wystarczy rozważyć przypadek, kiedy jedyny punkt α w nierówności to x lub z, a ponieważ nierówność jest symetryczna ze względu na nie, możemy założyć, że $z = \alpha$. Jeśli $\mu'(x, \alpha) \leqslant \mu'(y, \alpha)$, nierówność również jest spełniona (obejmuje to w szczególności przypadek, gdy x i y są w tym samym składniku sumy rozłącznej w E', zachodzi wtedy równość ich odległości od α), pozostaje więc do rozważenia nierówność

$$\mu'(x,\alpha) \leqslant \mu'(x,y) + \mu'(y,\alpha)$$

w przypadku, gdy $\mu'(x, \alpha) > \mu'(y, \alpha)$. Jeśli $x \in X \times (n_2, k_2)$ lub $x \in X^{n_2}$ dla pewnych $1 \leqslant k_2 \leqslant n_2$ (dla uproszczenia zapisu oznaczmy $X^\infty := \{\omega\}$), to lewą stronę nierówności trójkąta szacujemy z góry przez $13 + \sum_{\iota=0}^{n_2-2} \frac{1}{2^\iota}$ (w szczególności dla $n_2 = \infty$ przyjmujemy 15). Liczbę $\mu'(y, \alpha)$ szacujemy z dołu przez:

- $13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n_1-2} \frac{1}{2^\iota}\right) - \frac{1}{2^{n_1}}$ jeśli $y \in X \times \{(n_1, k_1)\}$ dla pewnych $2 \leqslant k_1 \leqslant n_1$,
- $13 + \sum_{\iota=0}^{n_1-2} \frac{1}{2^\iota}$ jeśli $y \in X^{n_1}$ dla pewnego $2 \leqslant n_1$,
- 13, jeśli $y \in X \times \{(1,1)\}$.

Liczbę $\mu'(x,y)$ wystarczy wtedy przeszacować od dołu analogicznie jak w Obserwacji 3 (ponieważ w tym przypadku μ' pokrywa się z λ). W każdym z przypadków dostajemy szacowanie implikujące nierówność trójkąta dla μ', jest więc poprawnie zdefiniowaną metryką.

Stosujemy następnie Lemat 1 do (F, λ) oraz (E', μ'), aby otrzymać (E, μ). Zauważmy, że otrzymujemy wtedy (a), ponieważ każdy punkt z $F \setminus E'$ należy do któregoś X^n dla $n \geqslant 2$, czyli jego odległość od dowolnego punktu z D^n (który, oczywiście, jest podzbiorem $F \cap E'$) nie przekracza $\frac{1}{4}$, a poza punktem α odległość na E nie przekracza 12 (podobnie jak w Lemacie 3, nie zależy nam na tym, żeby stała szacująca była możliwie najmniejsza). Natychmiast otrzymujemy również (d), (e) oraz (f). Zauważmy też, że dla dowolnego $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

- $\mu(\alpha, y) = 13 \Leftrightarrow y \in X \times \{(1,1)\}$,
- $\mu(\alpha, y) = c_{n,k} \Leftrightarrow y \in X \times \{(n,k)\}$,
- $\mu(\alpha, y) = 15 \Leftrightarrow y = \omega$.

Ponieważ μ rozszerza λ oraz dla dowolnych $x_1, x_2 \in X^n$, $n \geqslant 2$ zachodzi $\lambda(x_1, x_2) \leqslant \frac{1}{2^n}$, mamy również

$$c_{n,n} < 13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota}\right) \leqslant \mu(\alpha, y) \leqslant 13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota}\right) + \frac{1}{2^n} < c_{n+1,1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y \in X^n.$$

Co więcej, zachodzi

$$\mu(\alpha, y) = 13 + \left(\sum_{\iota=0}^{n-2} \frac{1}{2^\iota}\right) \Leftrightarrow y \in D_n. \tag{3}$$

Ponieważ $u^{\textcircled{n}}(D_n) = D_n$ dla wszystkich $n \geqslant 2$ oraz $u \in G$, dzięki Lematowi 2 dostajemy (b). Przechodzimy do warunku (c).

Rozważmy $g \in \mathrm{Iso}(E, \mu)$. Zauważmy, że α jest jedynym punktem w E takim, że $\mu(\alpha, x) = 13$ oraz $\mu(\alpha, y) = 15$ dla pewnych $x, y \in E$ (ponieważ $\mu|_{E \setminus \{\alpha\}} \leqslant 12$). Stąd $g(\alpha) = \alpha$, a co za tym idzie $g(X \times \{(n,k)\}) = X \times \{(n,k)\}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $g(X^n) = X^n$ dla $n \geqslant 2$. Z Lematu 2 istnieje więc $u \in \mathrm{Iso}(X, \rho)$ takie, że $g = \widehat{u}$. Dla dowolnego $n \geqslant 2$ mamy też $g(z_n) = u^{\textcircled{n}}(z_n) \in X^n$, więc z warunku (3) dostajemy $u^{\textcircled{n}}(z_n) \in D_n$. Warunek (g) łatwo wynika z pozostałych, co kończy dowód. $\square$

Obserwacja 4. Zauważmy, że jeśli (X, ρ) jest lokalnie zwarta, to ponownie możemy otrzymać (E, λ) lokalnie zwartą przez powtórzenie dowodu z pominięciem punktu ω.

Poniższa propozycja jest odpowiednikiem Propozycji 2.2 z [4].

Propozycja 1. *Niech (X, ρ) będzie niepustą, ośrodkową, ograniczoną przestrzenią metryczną oraz niech G będzie domkniętą podgrupą grupy* $\mathrm{Iso}(X, \rho)$. *Wtedy istnieje metryka ν na*

$$E := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\}) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i \right) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\}$$

taka, że:

(a) Odwzorowanie

$$G \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathrm{Iso}(E, \nu)$$

jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem grup topologicznych,

(b) $X \times \{(1,1)\} \subset E$ jest izometryczną kopią (X, ρ) oraz każdy inny składnik rozłącznej sumy w E jest albo punktem, albo przeskalowaną w dół kopią (X, ρ) lub $(X^{\textcircled{n}}, \rho^{\textcircled{n}})$, w szczególności $\rho_{\sup}(u, v) = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$ dla $u, v \in G$.

(c) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to (E, ν) też.

(d) Jeśli (X, ρ) jest zwarta, to (E, ν) też.

(e) Jeśli (X, ρ) jest lokalnie zwarta, to (E, ν) może zostać wybrana lokalnie zwarta (lecz wtedy ν może nie być zupełna).

Dowód. Dla $M \geqslant 1$ takiego, że $\rho \leqslant M$, określamy $d = \frac{\rho}{M} \leqslant 1$. Zauważmy, że wtedy $\mathrm{Iso}(X, \rho) = \mathrm{Iso}(X, d)$. Niech $X_0 = \{x_n | n \geqslant 1\}$ będzie gęstym podzbiorem X oraz dla każdego $n \geqslant 2$ określmy $z_n = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Stosujemy Lemat 3, aby otrzymać (E, μ) (w przypadku lokalnie zwartym ω nie jest w E). Dostajemy wtedy, że $G \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathrm{Iso}(E, \mu)$ jest dobrze zdefiniowanym zanurzeniem między grupami topologicznymi, udowodnimy, że jest ono surjektywne.

Weźmy $g \in \mathrm{Iso}(E, \mu)$. Mamy, że istnieje $u \in \mathrm{Iso}(X, d)$ takie, że $g = \widehat{u}$ oraz $\widehat{u}(z_n)$ jest w domknięciu (w X^n) zbioru $D_n = \{u^{\textcircled{n}}(z_n) | u \in G\}$ dla każdego $n > 1$. Istnieje więc $u_n \in G$ takie, że

$$\rho^{\textcircled{n}}(u_n{}^{\textcircled{n}}(z_n), u^{\textcircled{n}}(z_n)) < \frac{1}{n}$$

tzn. $\rho(u_n(x_k), u(x_k)) < \frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Stąd ciąg $u_1, u_2, \ldots$ zbiega punktowo do u na X_0. Z gęstości X_0 w X oraz domkniętości G, dostajemy $u \in G$.

Aby zakończyć dowód, określamy $\nu = 2M\mu$. □

Definicja 2. Przestrzeń metryczna (X, d) jest *iso-nice*, jeśli topologia zbieżności punktowej na $\mathrm{Iso}(X, d)$ pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej indukowaną przez d.

Przypomnijmy, że metrykę ϱ na grupie G nazywamy *obustronnie niezmienniczą*, gdy $\varrho(xz, yz) = \varrho(zx, zy) = \varrho(x, y)$ dla wszystkich $x, y, z \in G$.

Jesteśmy teraz gotowi, żeby udowodnić nasz wynik w przypadku ośrodkowym, ograniczonym.

Twierdzenie 7. *Niech (G, ρ) będzie ośrodkową grupą wyposażoną w ograniczoną, obustronnie niezmienniczą metrykę ρ. Wtedy istnieje ograniczona, ośrodkowa przestrzeń metryczna (E, ν) taka, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathrm{Iso}(E, \nu), \nu_{\sup})$. Ponadto:*

- *(E, ν) jest iso-nice.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E, ν) też.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zwarta, to (E, ν) też.*
- *Jeśli (G, ρ) jest lokalnie zwarta, to możemy wybrać (E, ν) lokalnie zwartą.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że $J : (G, \rho) \to (\mathrm{Iso}(G, \rho), \rho_{\sup})$, gdzie $J(g)(h) = gh$ dla wszystkich $g, h \in G$, jest izometrycznym homomorfizmem, co wynika z obustronnej niezmienniczości metryki ρ. Ponadto, $J(G)$ jest domknięte w $\mathrm{Iso}(G, \rho)$ (w topologii zbieżności punktowej). Z Propozycji 1 mamy, że $J(G)$ jest izomorficzna (jako grupa topologiczna) z przestrzenią $\mathrm{Iso}(E, \nu)$ (gdzie (E, ν) jak wyżej). Dla dowolnych $u, v \in G$ mamy $\rho_{\sup}(J(u), J(v)) = \nu_{\sup}(\widehat{J(u)}, \widehat{J(v)})$, więc (po utożsamieniu (G, ρ) z $(J(G), \rho_{\sup})$) dostajemy, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathrm{Iso}(E, \nu), \nu_{\sup})$. Ponadto, zbieżność punktowa ciągu $(\widehat{g_n})$ w $\mathrm{Iso}(E, \nu)$ pociąga za sobą $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ w G dla pewnego $g \in G$. Ponieważ ρ jest obustronnie niezmiennicza dostajemy, że (E, ν) jest iso-nice. □

Jako wniosek z powyższego twierdzenia, łatwo otrzymać twierdzenie Melleraya wspomniane we wstępie. Brakującym elementem jest poniższy klasyczny rezultat, podajemy jego dowód dla kompletności.

Lemat 4. *Niech G będzie metryzowalną grupą zwartą. Wtedy topologia G jest indukowana przez pewną metrykę obustronnie niezmienniczą ρ.*

Dowód. Niech d będzie dowolną metryką na G zgodną z jej topologią. Definiujemy ρ na dowolnych $x, y \in G$ przez

$$\rho(x,y) = \sup_{a,b\in G} d(axb, ayb).$$

Fakt, że ρ jest metryką przenosi się w trywialny sposób z d, obustronna niezmienniczość ρ wynika wprost z fundamentalnych własności grup. Twierdzimy, że d jest równoważna z ρ.

Przez $B_d(x,r)$ (odpowiednio $\overline{B}_d(x,r)$) będziemy oznaczać kulę otwartą (odpowiednio domkniętą) w metryce d o środku w x i promieniu r.

Ustalmy dowolne $x \in G$, $r > 0$.

Zauważmy, że dla dowolnego $y \in G$ zachodzi $d(x,y) \leqslant \rho(x,y) = \sup_{a,b\in G} d(axb, ayb)$, stąd $B_d(x,r) \supseteq B_\rho(x,r)$.

Z drugiej strony, mamy

$$B_\rho(x,r) \supseteq \overline{B}_\rho\left(x, \frac{r}{2}\right) = \{y \in G : \sup_{a,b\in G} d(axb, ayb) \leqslant \frac{r}{2}\} =$$

$$= \{y \in G : \forall_{a,b\in G}\ d(axb, ayb) \leqslant \frac{r}{2}\} = \bigcap_{a,b\in G} \{y \in G : d(axb, ayb) \leqslant \frac{r}{2}\}.$$

Funkcja $f : G \times G \times G \times G \to \mathbb{R}$ dana przez $f(a,b,x,y) = d(axb, ayb)$ jest ciągła w topologii wyznaczonej przez d, ponieważ metryka d oraz działanie grupy G są ciągłe w tejże topologii. Funkcja f jest określona na zbiorze zwartym, jest więc jednostajnie ciągła. Możemy więc dobrać do $\frac{r}{2}$ takie $\varepsilon > 0$, że dla dowolnych $a, b, x, x' \in G$ takich, że $d(x, x') < \varepsilon$ zachodzi $|f(a,b,x,x) - f(a,b,x,x')| < \frac{r}{2}$, czyli $d(axb, ax'b) < \frac{r}{2}$. Stąd każdy ze zbiorów $\{y \in G : d(axb, ayb) \leqslant \frac{r}{2}\}$ zawiera $B_d(x,\varepsilon)$, więc $B_\rho(x,r) \supseteq B_d(x,\varepsilon)$.

Metryki d i ρ są więc równoważne, co kończy dowód.

□

Wprost z Twierdzenia 7 oraz Lematu 4 dostajemy więc:

Wniosek 1. *(Twierdzenie Melleraya* [3]*) Niech G będzie zwartą grupą metryzowalną. Istnieje wtedy zwarta przestrzeń metryczna Y taka, że G jest izomorficzna z* $\mathrm{Iso}(Y)$.

3.2. **Przypadek ośrodkowy, nieograniczony.**
Skupimy się teraz na przypadku nieograniczonym. Idea jest bardzo podobna, a dowody prawie identyczne, więc zamiast powtarzać większość argumentów z przypadku ośrodkowego, skupimy się na opisaniu różnic. Intuicyjnie, skalowanie metryki w dół nie zmienia grupy izometrii, więc podczas konstrukcji przestrzeni naszym celem będzie ograniczanie metryki na kopiach naszej oryginalnej przestrzeni i jej iloczynach kartezjańskich przez coraz większe stałe. Samo to nie skutkowałoby przestrzenią ograniczoną, więc poza tym będziemy je skalować w dół. W efekcie dostajemy przestrzeń, która jest ograniczona, ale jej izometrie odpowiadają izometriom oryginalnej przestrzeni (mimo, że może nie być ograniczona (!)). Samo to nie skutkowałoby oczywiście izometrycznym izomorfizmem w przypadku nieograniczonym, więc dokończymy dowód przez dorzucenie do tej przestrzeni odpowiednich przestrzeni ograniczonych.

Wprowadźmy dla wygody następujące definicje.

Definicja 3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $u \in \mathrm{Iso}(X, d)$ jest *ograniczone*, gdy

$$\sup_{x \in X} d(u(x), x) < \infty.$$

Definicja 4. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że X jest *iso-ograniczona*, gdy każda izometria $u \in \mathrm{Iso}(X, d)$ jest ograniczona.

Twierdzenie, które chcemy otrzymać, brzmi następująco.

Twierdzenie 8. *Niech (G, ρ) będzie grupą ośrodkową wyposażoną w obustronnie niezmienniczą metrykę ρ. Wtedy istnieje iso-ograniczona, ośrodkowa przestrzeń metryczna (E', ν') taka, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna do*

$$(\mathrm{Iso}(E', \nu'), \nu'_{\mathrm{sup}}).$$

Ponadto:

- *(E', ν') jest iso-nice.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E', ν') też.*
- *Jeśli (G, ρ) jest lokalnie zwarta, to (E', ν') może zostać wybrana lokalnie zwarta.*

Powyższe twierdzenie podaje (w pełnej ogólności) modele (z dokładnością do izometrycznego izomorfizmu) dla ośrodkowych grup topologicznych wyposażonych w metryki obustronnie niezmiennicze.

Zanim przejdziemy do dowodu, opiszemy osobno wersje nieograniczone lematów i propozycji wykorzystywanych w przypadku ośrodkowym, ograniczonym. Będziemy się odwoływać do nich również później, w przypadku nieośrodkowym.

Odpowiednik Lematu 2 wygląda następująco.

Lemat 5. *Niech (X, ρ) będzie niepustą przestrzenią metryczną. Wtedy istnieje metryka λ na*

$$F := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\}) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i \right) \sqcup \{\omega\}$$

taka, że:

- *(a)* $\lambda \leqslant 8$.
- *(b) Dla każdego $u \in \operatorname{Iso}(X, \rho)$ odwzorowanie $\widehat{u} : F \to F$ należy do $\operatorname{Iso}(F, \lambda)$.*
- *(c) Jeśli $g \in \operatorname{Iso}(F, \lambda)$ spełnia warunek $g(X \times \{(n,k)\}) = X \times \{(n,k)\}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $g(X^n) = X^n$ dla wszystkich $n > 1$, to istnieje $u \in \operatorname{Iso}(X, \rho)$ takie, że $g = \widehat{u}$.*
- *(d) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to (F, λ) również.*
- *(e) Jeśli (X, ρ) jest zwarta, to (F, λ) również.*
- *(f) $\mu|_{X \times \{(n,k)\}}$ pokrywa się z $\frac{(\rho \times (n,k)) \wedge 2^n}{2^{2n}}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $\mu|_{X^n}$ pokrywa się z $\frac{\rho^{(n)} \wedge 2^n}{2^{2n}}$ dla wszystkich $n > 1$.*
- *(g) Dla $u, v \in \operatorname{Iso}(X, \rho)$ mamy $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2 = 4\lambda_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$.*

Podpunkt (e), jeśli metryka nie jest ograniczona jest, oczywiście, pusto spełniony, jednak otrzymujemy w ten sposób tezę różniącą się od tej z Lematu 2 tylko w podpunktach (f) i (g) przy słabszych założeniach, w taki sposób, że podpunkty o tych samych numerach (w Lemacie 2 i Lemacie 5) w oczywisty sposób sobie odpowiadają, dlatego pozostawiamy podpunkt (e) w wypowiedzi.

Dowód. Większość rozumowania pokrywa się z dowodem Lematu 2, będziemy opisywać konieczne zmiany.

Po pierwsze, zmieniamy definicję λ_B na:

- $\lambda_B(x^{(i)}, y^{(i)}) = \frac{\rho(x,y) \wedge 2^i}{2^{2i}}$ dla wszystkich $x, y \in X$, $i \geqslant 1$.

- $\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{j}}) = \lambda_B(y^{\textcircled{j}}, x^{\textcircled{i}}) = \frac{\rho(x,y)\wedge 2^j}{2^{2j}} + \sum_{\iota=i-1}^{j-2} \frac{1}{2^\iota}$ dla wszystkich $x, y \in X$, $j > i \geqslant 1$.
- $\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, \omega) = \lambda_B(\omega, x^{\textcircled{i}}) = \sum_{\iota=i-1}^{\infty} \frac{1}{2^\iota}$ dla wszystkich $x \in X$, $i \geqslant 1$.

Zauważmy, że $\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{i}}) = \frac{\rho(x,y)\wedge 2^i}{2^{2i}} \leqslant \frac{1}{2^i}$. Ponownie, jedyną nietrywialną własnością do sprawdzenia, aby udowodnić, że jest to metryka, jest nierówność trójkąta. Podobnie jak w dowodzie Lematu 2, będziemy używać oznaczeń $c_\infty = 0$ oraz $c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ dla $k \geqslant 0$. Metrykę λ_B można wtedy opisać równoważnie jako

$$\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{j}}) = c_{i\vee j}^2(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j}) + 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j}).$$

Analogicznie jak poprzednio sprawdzamy, czy dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$, $i, j, k \geqslant 1$ zachodzi

$$\lambda_B(x^{\textcircled{i}}, z^{\textcircled{k}}) \leqslant \lambda_B(x^{\textcircled{i}}, y^{\textcircled{j}}) + \lambda_B(y^{\textcircled{j}}, z^{\textcircled{k}}),$$

co sprowadza się do

$$c_{i\vee k}^2(\rho(x,z) \wedge 2^{i\vee k}) - c_{i\vee j}^2(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j}) - c_{j\vee k}^2(\rho(y,z) \wedge 2^{j\vee k}) \leqslant$$
$$\leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_{j\wedge k} - c_{j\vee k} - c_{i\wedge k} + c_{i\vee k}).$$

Również jak poprzednio, możemy bez straty ogólności założyć, że $i \leqslant k$. Jeśli $j \leqslant k$, nierówność sprowadza się do

$$c_k^2(\rho(x,z) \wedge 2^k) - c_{i\vee j}^2(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j}) - c_k^2(\rho(y,z) \wedge 2^k) \leqslant$$
$$\leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_j - c_i).$$

Ponieważ $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$, zachodzi również $(\rho(x,z) \wedge 2^k) \leqslant (\rho(x,y) \wedge 2^k) + (\rho(y,z) \wedge 2^k)$, wystarczy więc pokazać, że

$$c_k^2(\rho(x,y) \wedge 2^k) - c_{i\vee j}^2(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j}) \leqslant 4(c_{i\wedge j} - c_{i\vee j} + c_j - c_i).$$

W dowodzie Lematu 2 udowodniliśmy już, że prawa strona nierówności jest nieujemna, wystarczy więc pokazać, że lewa jest niedodatnia. Istotnie, zauważmy, że dla dowolnych $0 < p \leqslant q$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ zachodzi $c_q(x_0 \wedge 2^q) \leqslant c_p(x_0 \wedge 2^p)$, więc, ponieważ $k \geqslant i \vee j$, mamy $c_k(\rho(x,y) \wedge 2^k) \leqslant c_{i\vee j}(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j})$, a zatem również $c_k^2(\rho(x,y) \wedge 2^k) \leqslant c_{i\vee j}^2(\rho(x,y) \wedge 2^{i\vee j})$.

Pozostaje przypadek $i \leqslant k < j$. Nierówność sprowadza się wtedy do

$$c_k^2(\rho(x,z) \wedge 2^k) - c_j^2(\rho(x,y) \wedge 2^j) - c_j^2(\rho(y,z) \wedge 2^j) \leqslant 4(2c_k - 2c_j).$$

Lewą stronę możemy przeszacować z góry przez c_k, wystarczy więc pokazać, że $c_k \leqslant 4(2c_k - 2c_j)$, czyli $8c_j \leqslant 7c_k$. Ponieważ $k < j$, mamy $2c_j \leqslant c_k$, czyli nierówność zachodzi, co kończy dowód nierówności trójkąta dla λ_B.

Kontynuujemy dowód lematu, jednak określamy $(X^k, \frac{\rho^{(k)} \wedge 2^k}{2^{2k}})$ na każdej z potęg X, a następnie określamy, że $\lambda_{n,k}$ ma pokrywać się z $\frac{\rho \wedge 2^n}{2^{2n}} \times (n,k)$ oraz dla $i < j$ spełniać

$$\lambda_{n,k}((x,(n,k)),(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{1}{2^n} + \frac{\rho \wedge 2^n}{2^{2n}}(x, x_k).$$

W dowodzie (c) otrzymujemy wtedy, że $u_{1,1} \in \mathrm{Iso}(X, \rho \wedge 2)$ oraz $u_{n,1} \in \mathrm{Iso}(X, \rho \wedge 2^n)$ dla wszystkich $n \geqslant 2$. Ponieważ otrzymujemy też, że wszystkie są równe, wszystkie są w $\mathrm{Iso}(X, \rho)$.

Zmodyfikowane (f) i (g) otrzymujemy w dokładnie analogiczny sposób do dowodu w przypadku ograniczonym. □

Zauważmy, że mimo, że metryka λ została zmieniona, szacowania z Obserwacji 3 stosują się również do metryki otrzymanej z Lematu 5.

Przechodzimy do odpowiednika Lematu 3.

Lemat 6. *Niech (X, ρ) będzie niepustą przestrzenią metryczną oraz niech G będzie domkniętą podgrupą $\mathrm{Iso}(X, \rho)$. Niech $(z_n)_{n=2}^{\infty} \subset \bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i$ będzie ciągiem punktów takim, że dla $n \geqslant 2$ mamy $z_n \in X^n$. Dla każdego $n \geqslant 2$ oznaczmy przez $D_n \subset X^n$ domknięcie (w X^n) zbioru $\{u^{(n)}(z_n) | u \in G\}$. Wtedy istnieje metryka μ na*

$$E := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n,k)\}) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i \right) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\}$$

taka, że:

- *(a)* $\mu < 16$.
- *(b) Dla każdego $u \in G$ odwzorowanie $\widehat{u} : E \to E$ jest w* $\mathrm{Iso}(E, \mu)$.
- *(c) Dla dowolnego $g \in \mathrm{Iso}(E, \mu)$ istnieje $u \in \mathrm{Iso}(X, \rho)$ takie, że $g = \widehat{u}$ oraz $u^{(n)}(z_n) \in D_n$ dla wszystkich $n \geqslant 2$.*
- *(d) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to (E, μ) też.*
- *(e) Jeśli (X, ρ) jest zwarta, to (E, μ) też.*
- *(f) $\mu|_{X \times \{(n,k)\}}$ pokrywa się z $\frac{(\rho \times (n,k)) \wedge 2^n}{2^{2n}}$ dla wszystkich $n \geqslant k \geqslant 1$ oraz $\mu|_{X^n}$ pokrywa się z $\frac{\rho^{(n)} \wedge 2^n}{2^{2n}}$ dla wszystkich $n > 1$.*

(g) Dla dowolnych $u, v \in G$ mamy $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2^n = 2\mu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$.

Dowód. Ponownie zauważmy, że teza lematu różni się tylko w podpunktach (f) i (g).

W dowodzie Lematu 3 jedynymi własnościami metryki λ otrzymanej z Lematu 2, które wykorzystujemy, są ograniczenia na składnikach sumy rozłącznej w F oraz odległości między nimi (które są takie same po modyfikacji), więc możemy powtórzyć dowód (zmieniając wszędzie metrykę z Lematu 2 na tę z Lematu 5). $\square$

Zwróćmy uwagę na następujący fakt.

Obserwacja 5. Pomimo zmian koniecznych, aby wypowiedzieć wersję dla metryki nieograniczonej, szacowania z Obserwacji 3 stosują się do metryki μ z Lematu 6. Również odległości punktu α od składników sumy rozłącznej w definicji E pozostają bez zmian.

Wypowiemy teraz odpowiednik Propozycji 1.

Propozycja 2. *Niech (X, ρ) będzie niepustą, ośrodkową przestrzenią metryczną oraz niech G będzie domkniętą podgrupą grupy $\mathrm{Iso}(X, \rho)$. Wtedy istnieje metryka ν na*

$$E := \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} (X \times \{(n, k)\}) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^{\infty} X^i \right) \sqcup \{\omega\} \sqcup \{\alpha\}$$

taka, że:

(a) Odwzorowanie

$$G \ni u \mapsto \widehat{u} \in \mathrm{Iso}(E, \nu)$$

jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem grup topologicznych.

(b) $X \times \{(1, 1)\} \subset E$ jest izometryczną kopią $(X, \rho \wedge 2)$ oraz każdy inny składnik rozłącznej sumy w E jest albo punktem, albo kopią $(X, \frac{\rho \wedge 2^n}{2^{2n}})$ lub $(X^{ⓝ}, \frac{\rho^{ⓝ} \wedge 2^n}{2^{2n}})$, w szczególności zachodzi $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2 = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$ dla $u, v \in G$.

(c) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to (E, ν) też.

(d) Jeśli (X, ρ) jest zwarta, to (E, ν) też.

(e) Jeśli (X, ρ) jest lokalnie zwarta, to (E, ν) może zostać wybrana lokalnie zwarta (lecz wtedy ν może nie być zupełna).

(f) $\nu < 64$.

Dowód. Powtarzamy dowód Propozycji 1 stosując Lemat 6 zamiast Lematu 3, dodatkowo na początku określamy $d = \rho$ (zamiast skalować ją w dół), a na końcu określamy $\nu = 4\mu$ (zamiast skalować w górę). Ponieważ z Lematu 6 mamy $\mu < 16$, dostajemy (f). □

Możemy teraz przejść do dowodu głównego wyniku tej podsekcji.

Dowód Twierdzenia 8. Jeśli ρ jest ograniczona, to mamy już żądany wynik. Załóżmy, że nie jest (wtedy, w szczególności, (G, ρ) nie jest zwarta).

Możemy teraz powtórzyć dowód Twierdzenia 7 aż do momentu zastosowania Propozycji 1, zamiast niej stosujemy Propozycję 2. Nie dostajemy od razu własności $\rho_{\sup}(u, v) = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$, jak wcześniej (utożsamiamy ze sobą (G, ρ) oraz $(J(G), \rho_{\sup})$), lecz $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2 = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$. Aby otrzymać tezę, zmodyfikujemy E. Ze względu na powtarzające się podwajanie odległości do kolejnych składników w dalszej konstrukcji wygodnie nam będzie używać potęg dwójki, mamy w szczególności $\nu < 2^6$.

Rozważmy $H = \{\gamma\} \sqcup E$ oraz $K = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X \times \{n\}$ takie, że H oraz K przecinają się na kopii X (utożsamiamy $X \times \{(1, 1)\}$ w H z $X \times \{1\}$ w K). Definiujemy ν_H na H przez:

- $\nu_H|E = \nu$
- $\nu_H(\gamma, x) = \nu_H(x, \gamma) = 2^6$ dla wszystkich $x \in E$

oraz ν_K na K przez:

- $\nu_K|_{X\times\{n\}} = (\rho \wedge 2^n) \times n$ dla $n \geqslant 1$
- $\nu_K((x, k), (y, n)) = \nu_K((y, n), (x, k)) = 2^{n+5} - 2^{k+5} + \rho(x, y) \wedge 2^k$ dla $x \in X$, $n \geqslant k \geqslant 1$

Twierdzimy, że ν_H oraz ν_K są metrykami.

Jedynym nietrywialnym warunkiem do sprawdzenia dla ν_H jest nierówność trójkąta. Rozważmy dowolne $x, y, z \in H$. Chcemy pokazać, że $\nu_H(x, z) \leqslant \nu_H(x, y) + \nu_H(y, z)$. Jeśli co najmniej dwa spośród punktów x, y, z to γ, nierówność się trywializuje, pozostaje więc przypadek, gdy dokładnie jeden rozważany punkt to γ. Ponieważ $\nu < 2^6$, wystarczy sprawdzić przypadek, gdy x lub z to γ, a ponieważ nierówność jest ze względu na nie symetryczna, załóżmy, że $z = \gamma$ oraz $x, y \in E$. Nierówność sprowadza się więc do

$$2^6 = \nu_H(x, \gamma) \leqslant \nu_H(x, y) + \nu_H(y, \gamma) = \nu_H(x, y) + 2^6,$$

co jest spełnione.

Przechodzimy do ν_K. Podobnie, jedynym nietrywialnym warunkiem do sprawdzenia jest nierówność trójkąta, weźmy więc dowolne $(x,i),(y,j),(z,k) \in K$. Chcemy więc udowodnić, że

$$\nu_K((x,i),(z,k)) \leqslant \nu_K((x,i),(y,j)) + \nu_K((y,j),(z,k)).$$

Wystarczy rozważyć przypadek, kiedy największa z trzech odległości jest po lewej stronie nierówności. Zauważmy, że jeśli i,j,k są parami różne, to fakt, która z trzech odległości w nierówności trójkąta jest największa, zależy tylko od i,j,k, ponieważ część ν_K zależna od ρ jest zbyt mała w porównaniu do reszty. Istotnie, dla dowolnych $a > b \geqslant 1$ mamy $2^{a+5} - 2^{b+5} + 2^b < 2^{(a+1)+5} - 2^{b+5}$ oraz $2^{a+5} - 2^{b+5} + 2^b < 2^{a+5} - 2^{(b-1)+5}$. Wystarczy więc rozważyć przypadek, gdy $i \geqslant j \geqslant k$ (jeśli j nie jest pomiędzy i oraz k, to największa odległość znajduje się po prawej stronie nierówności, pozostałe dwa przypadki są symetryczne ze względu na i oraz k). Sprowadziliśmy więc nierówność do

$$2^{i+5} - 2^{k+5} + \rho(x,z) \wedge 2^k \leqslant$$

$$\leqslant 2^{i+5} - 2^{j+5} + \rho(x,y) \wedge 2^j + 2^{j+5} - 2^{k+5} + \rho(y,z) \wedge 2^k.$$

Równoważnie, mamy

$$\rho(x,z) \wedge 2^k \leqslant \rho(x,y) \wedge 2^j + \rho(y,z) \wedge 2^k.$$

Ponieważ zachodzi $\rho(x,z) \wedge 2^k \leqslant \rho(x,y) \wedge 2^k + \rho(y,z) \wedge 2^k$, wystarczy, że

$$\rho(x,y) \wedge 2^k + \rho(y,z) \wedge 2^k \leqslant \rho(x,y) \wedge 2^j + \rho(y,z) \wedge 2^k,$$

co zachodzi, ponieważ $j \geqslant k$. Kończy to dowód nierówności trójkąta.

Ponieważ izometryczna kopia $(X, \rho \wedge 2)$ znajduje się zarówno w H, jak i w K, możemy zastosować Lemat 1 aby otrzymać (E', ν'). Zauważmy, że mamy

$$\nu'(\gamma,(x,n)) = 2^{n+5}$$

dla wszystkich $n \geqslant 1$. Istotnie, z wypowiedzi Lematu 1 mamy

$$\nu'(\gamma,(x,n)) =$$

$$= \inf\left\{\nu_H(\gamma,(y,1)) + \nu_K((y,1),(x,n)) | (y,1) \in X \times \{1\}\right\}.$$

Ponieważ $\nu_H(\gamma,(y,1)) = 2^6$ oraz $\nu_K((y,1),(x,n)) \geqslant 2^{n+5} - 2^{5+1}$, mamy

$$\inf\left\{\nu_H(\gamma,(y,1)) + \nu_K((y,1),(x,n)) | (y,1) \in X \times \{1\}\right\} \geqslant 2^{n+5}.$$

Dla $y = x$ mamy jednak

$$\nu_H(\gamma, (y, 1)) + \nu_K((y, 1), (x, n)) = 2^6 + 2^{n+5} - 2^6 = 2^{n+5},$$

czyli istotnie $\nu'(\gamma, (x, n)) = 2^{n+5}$.

Weźmy teraz dowolny $\phi \in \mathrm{Iso}(E', \nu')$. Mamy, że dla dowolnego $x \in E' \setminus \{\gamma\}$ odległość $\nu'(\gamma, x)$ jest postaci 2^n dla pewnego naturalnego $n \geqslant 6$.

Twierdzimy, że γ jest jedynym punktem w E' o tej własności. Zauważmy, że X jest niepuste (ponieważ G jest grupą, zawiera przynajmniej element neutralny). Przypuśćmy, że $\gamma' \in E'$ jest punktem różnym od γ spełniającym tę własność. Gdyby $\gamma' \in E$, to ponieważ E zawiera więcej niż jeden punkt oraz $\nu' < 2^6$ na E, własność nie byłaby spełniona. Pozostaje możliwość $\gamma' \in X \times \{k\}$ dla pewnego $k \geqslant 2$. Ponieważ ν' rozszerza metrykę μ określoną w Lemacie 3 na E, zachodzi w szczególności $\nu'(\alpha, y) = 13$ dla dowolnego $y \in X \times \{1\}$ (gdzie α jest punktem z E, które jest zdefiniowane w Lemacie 3). Dostajemy więc $\mu'(\gamma', \alpha) = 2^{k+5} - 2^6 + 13$ ze wzoru ma metrykę w Lemacie 1, co nie jest żądanej postaci. Punkt γ jest więc istotnie jedynym o tej własności.

Wynika z tego, że $\phi(\gamma) = \gamma$, a co za tym idzie $\phi(E) = E$ oraz $\phi(X \times \{n\}) = X \times \{n\}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$. Stąd mamy $\phi|_E = \widehat{u_\phi}$ dla pewnego $u_\phi \in \mathrm{Iso}(X, \rho)$. Zauważmy, że $\nu'_K((x, 1), (y, n)) = 2^{n+5} - 2^6$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ dla wszystkich $n \geqslant 1$, więc $\phi|_{X \times \{n\}} = u_\phi \times n$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że dla każdego $u \in \mathrm{Iso}(X, \rho)$ odwzorowanie $\widehat{u}' : E' \to E'$ dane przez $\widehat{u}'|_E = \widehat{u}$, $\widehat{u}'(\gamma) = \gamma$ oraz $\widehat{u}'|_{X \times \{n\}} = u \times n$ dla wszystkich $n \geqslant 2$ jest w $\mathrm{Iso}(E', \nu')$. Mamy również $\rho_{\sup}(u, v) = \nu'_{\sup}(\widehat{u}', \widehat{v}')$, co łatwo wynika ze wzoru na ν_K. Dostajemy więc żądany izometryczny izomorfizm, w szczególności (E', ν') jest iso-ograniczona.

Uzasadnienie tego, że (E', ν') jest iso-nice jest podobne do przypadku ograniczonego. Zbieżność punktowa ciągu uogólnionego $(\widehat{g_\sigma})$ w $\mathrm{Iso}(E', \nu')$ implikuje zbieżność punktową $(\widehat{g_\sigma}|_E)$ w (E, ν), co z kolei pociąga za sobą $g_\sigma \to g$ w G dla pewnego $g \in G$ w metryce obustronnie niezmienniczej danej na G. Ciąg uogólniony $(\widehat{g_\sigma})$ zbiega więc do $\widehat{g}$ jednostajnie na E' ((G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathrm{Iso}(E', \nu'), \nu'_{\sup})$).

Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E', ν') też, ponieważ do przestrzeni E (która ma tę własność, uzasadnienie przenosi się z przypadku ośrodkowego) dorzucamy punkt oraz kopie przestrzeni X z metrykami równoważnymi ρ, które w metryce ν mają dodatnią odległość od reszty E'. Ten sam argument działa dla lokalnej zwartości. □

4. Przypadek nieośrodkowy

W tej sekcji przedstawimy modyfikację rozumowania przedstawionego dla przypadku ośrodkowego, aby uzyskać przypadek nieośrodkowy. Jest to kontynuacja rozważań przedstawionych w mojej pracy [5], jednak przedstawione w niniejszej sekcji wyniki nie są jeszcze opublikowane. Konstrukcja ponownie opierać się będzie na tej przedstawionej w [4], z modyfikacjami koniecznymi, aby uzyskać żądany wynik.

Naszym celem dla przestrzeni X o ciężarze topologicznym β będzie zastosowanie Lematu 3 (odpowiednio, Lematu 6) wielokrotnie, aby otrzymać przestrzeń będącą sumą β kopii przestrzeni z tezy lematu, przecinających się na kopii X (odpowiednio z oryginalną metryką przeskalowaną przez stałą oraz oryginalną metryką obciętą do pewnej potęgi dwójki i przeskalowaną przez stałą), różniących się w konstrukcji ciągiem punktów (z_n) (przypomnijmy, że w przypadku ograniczonym ciąg ten odpowiadał zbiorowi gęstemu w X). Pozwoli nam to postąpić podobnie jak wcześniej, jednak dla zbioru gęstego mocy β. Do wspomnianej sumy dodane będą dodatkowe elementy, zapewniające przechodzenie odpowiednich składowych „wysp” konstruowanej przestrzeni na siebie.

Zanim przejdziemy dalej będziemy potrzebować lematu, również z [4], gdzie został przedstawiony wraz z dowodem, który z tego powodu pomijamy.

Lemat 7. *Niech a oraz b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że*

$$a < b \leqslant 2a. \tag{4}$$

Dla każdego zbioru X posiadającego więcej niż 5 punktów istnieje metryka $d : X \times X \to \{0, a, b\}$ taka, że

$$\mathrm{Iso}(X, d) = \{\mathrm{id}_X\}. \tag{5}$$

Wprowadzimy teraz definicję analogiczną do przypadku ośrodkowego (analogiczną jak w [4]).

Definicja 5. Niech β będzie nieskończoną liczbą kardynalną, D_β będzie przestrzenią dyskretną mocy β. Dla przestrzeni metryzowalnej X oraz funkcji $f : X \to X$ niech X^0 będzie przestrzenią jednopunktową oraz $f^{ⓞ} : X^0 \to X^0$ będzie identycznością. Przez $\widehat{X}_\beta$ oraz $\widehat{f}_\beta$ będziemy oznaczać, odpowiednio, iloczyn kartezjański $(\bigsqcup_{n=0}^\infty X^n) \times D_\beta$ oraz odwzorowanie przestrzeni $\widehat{X}_\beta$ w siebie takie, że $\widehat{f}_\beta = f^{ⓝ} \times \xi$ na $X^n \times \{\xi\}$ dla każdych $n \geqslant 0$ oraz $\xi \in D_\beta$. W dalszym ciągu będziemy utożsamiać zbiór $X^0 \times D_\beta$ (w naturalny sposób) z D_β.

Podobnie jak w przypadku ośrodkowym, skupimy się najpierw na wersji ograniczonej, potem przedstawimy modyfikację dla przypadku nieograniczonego.

4.1. **Przypadek nieośrodkowy, ograniczony.** Wypowiemy teraz analogon Propozycji 1, jest on odpowiednikiem Twierdzenia 3.2 z [4].

Propozycja 3. *Niech β będzie nieskończoną liczbą kardynalną, D_β będzie przestrzenią dyskretną mocy β z wyróżnionym punktem $\theta \in D_\beta$, niech (X, ρ) będzie niepustą, ograniczoną przestrzenią metryczną taką, że $w(X) \leqslant \beta$ oraz niech G będzie domkniętą podgrupą $\operatorname{Iso}(X, \rho)$. Wtedy istnieje metryka ν na $\widehat{X}_\beta$ taka, że:*

(a) Odwzorowanie

$$G \ni u \mapsto \widehat{u}_\beta \in \operatorname{Iso}(\widehat{X}_\beta, \nu)$$

jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem grup topologicznych.

(b) $X \times \theta \subset \widehat{X}_\beta$ jest izometryczną kopią (X, ρ) oraz każdy inny składnik rozłącznej sumy w $\widehat{X}_\beta$ jest albo punktem, albo przeskalowaną w dół kopią (X, ρ) lub $(X^{ⓝ}, \rho^{ⓝ})$, w szczególności $\rho_{\sup}(u, v) = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$.

(c) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to $(\widehat{X}_\beta, \nu)$ też.

Dowód. Dla $M \geqslant 1$ takiego, że $\rho \leqslant M$, określamy $d = \frac{\rho}{M} \leqslant 1$. Zauważmy, że wtedy $\operatorname{Iso}(X, \rho) = \operatorname{Iso}(X, d)$. Niech X_0 będzie gęstym podzbiorem X takim, że $\operatorname{card}(X_0) \leqslant \beta$. Zapiszmy $D_\beta \setminus \{\theta\}$ jako sumę rozłączną $\bigsqcup_{n=0}^2 S_n$ taką, że $\operatorname{card}(S_n) = \beta$ dla każdego $0 \leqslant n \leqslant 2$. Dla uproszczenia zapisu w dowodzie, zdefiniujmy $S_* := S_1 \sqcup S_2$ oraz $X_* := ((\bigcup_{n=1}^\infty X^n) \times D_\beta) \sqcup S_* = \widehat{X}_\beta \setminus (S_0 \cup \{\theta\})$. Ustalmy dowolną bijekcję $\tau : D_\beta \times \bigsqcup_{n=2}^\infty \bigsqcup_{k=1}^n \{(n, k)\} \to D_\beta \setminus \{\theta\}$, bijekcje $\tau_i : D_\beta \to S_i$

dla $i \in \{1,2\}$ oraz surjekcje $\kappa_n : D_\beta \to {X_0}^n$ dla $\xi \in D_\beta$, $n \geqslant 0$. Dla dowolnego $\xi \in D_\beta$ niech

$$E_\xi := \left[X \times \left(\{\theta\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau(\xi,(n,k))\} \right) \right] \cup$$

$$\cup \left((\bigsqcup_{n=2}^{\infty} X^n) \times \{\xi\} \right) \cup \{\tau_1(\xi)\} \cup \{\tau_2(\xi)\}.$$

Z Lematu 3 (utożsamiamy $X \times \{\theta\}$ z $X \times \{(1,1)\}$ z tegoż Lematu, $X \times \{\tau(\xi,(n,k))\}$ z $X \times \{(n,k)\}$ z tegoż Lematu, $\tau_1(\xi)$ z ω, $\tau_2(\xi)$ z α, iloczyn kartezjański przestrzeni z punktem z samą przestrzenią) istnieje metryka μ_ξ na E_ξ taka, że:

(a') $\mu_\xi < 16$.
(b') Dla każdego $u \in G$ odwzorowanie $\widehat{u}_\beta|_{E_\xi} : E_\xi \to E_\xi$ jest w $\mathrm{Iso}(E_\xi, \mu_\xi)$.
(c') Dla dowolnego $g \in \mathrm{Iso}(E_\xi, \mu_\xi)$ istnieje $u \in \mathrm{Iso}(X, \rho)$ takie, że $g = \widehat{u}_\beta|_{E_\xi}$ oraz $u^{(n)}(\kappa_n(\xi)) \times \{\xi\}$ jest w domknięciu $B_{\xi,n}$ zbioru $\{\{f^{(n)}(\kappa_n(\xi))\} \times \{\xi\} | f \in G\}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$.
(d') Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to (E_ξ, μ_ξ) też.
(e') Jeśli (X, ρ) jest zwarta, to (E_ξ, μ_ξ) też.
(f') $\mu_\xi|_{X \times \{\theta\}}$ pokrywa się z $\frac{\rho \times \theta}{2}$, $\mu_\xi|_{X \times \{\tau(\xi,(n,k))\}}$ pokrywa się z $\frac{\rho \times \tau(\xi,(n,k))}{2^n}$ dla wszystkich $n \geqslant k$, $n \geqslant 2$ oraz $\mu_\xi|_{X^n \times \{\xi\}}$ pokrywa się z $\frac{\rho^{(n)} \times \xi}{2^n}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$.
(g') Dla dowolnych $u, v \in G$ mamy $\rho_{\sup}(u, v) = 2{\mu_\xi}_{\sup}(\widehat{u}_\beta, \widehat{v}_\beta)$.

Zauważmy, że z konstrukcji wynika $E_\xi \cap E_\eta = X \times \{\theta\}$ dla różnych $\xi, \eta \in D_\beta$. Zauważmy też, że $X \times \{\theta\}$ jest domknięte w każdym X_ξ. Stosujemy teraz Lemat 1 i otrzymujemy metrykę μ na $X_* = \bigcup_{\xi \in D_\beta} E_\xi$. Ponownie z Lematu 1 oraz (b') otrzymujemy, że

$$\widehat{u}_\beta|_{X_*} \in \mathrm{Iso}(X_*, \mu) \text{ dla każdego } u \in G. \tag{6}$$

Mamy też (z (a')), że

$$\mu < 32. \tag{7}$$

Zauważmy, że zachodzi również (z konstrukcji metryki z Lematu 3, z podpunktu (i) Obserwacji 3, i z Lematu 1), że

$$\mu(\xi, \eta) \geqslant 4 \text{ dla różnych } \xi, \eta \in S_*. \tag{8}$$

Istotnie, wprost z definicji metryki μ z Lematu 3 otrzymujemy, że $\mu_\xi(\tau_1(\xi), \tau_2(\xi)) = 15$ oraz $\mu_\xi(x, \tau_2(\xi)) = 13$ dla dowolnego $x \in X \times \{\theta\}$. Z podpunktu (i) Obserwacji 3 mamy też, że $\mu_\xi(x, \tau_1(\xi)) = 2$ dla dowolnego $x \in X \times \{\theta\}$. Z Lematu 1, ponieważ przestrzenie „skleiliśmy" na $X \times \{\theta\}$ dostajemy więc szacowanie (8).

Twierdzimy, że zachodzi również własność

($*$) Jeśli $g \in \mathrm{Iso}(X_*, \mu)$ jest takie, że $g(\xi) = \xi$ dla dowolnego $\xi \in S_*$ to $g = \widehat{u}_\beta | X_*$ dla pewnego $u \in G$.

Udowodnimy teraz ($*$). Weźmy dowolne g jak wyżej. W tym fragmencie dowodu, jeśli nie jest napisane inaczej, rozważamy metrykę μ (ewentualnie zawężoną do podzbioru). Z dowodu Lematu 3 wiemy, że w obrębie konkretnego E_ξ, jeśli $\tau_2(\xi)$ (który, przypomnijmy, odpowiada α z wypowiedzi lematu) jest punktem stałym izometrii E_ξ, to odległości pozostałych składników sumy rozłącznej w E_ξ od niego wymuszają, aby ta izometria przeprowadziła każdą z nich na siebie. Ten sam argument nie działa w tym przypadku, ponieważ wszystkie zbiory postaci $X^n \times \{\eta\}$ (dla $\eta \in D_\beta$, $n \geqslant 2$) znajdują się w tej samej odległości od $\tau_2(\xi)$.

Zauważmy jednak, że $\tau_1(\xi)$ (który odpowiada ω z wypowiedzi lematu) również jest punktem stałym g oraz jedynymi punktami w odległości $\leqslant 2$ od niego są elementy składowych $E_\xi \setminus \{\tau_2(\xi)\}$. Istotnie, z Obserwacji 3 mamy, że wszystkie punkty $E_\xi \setminus \{\tau_2(\xi)\}$ znajdują się w odległości $\leqslant 2$ od $\tau_1(\xi)$. Wszystkie punkty postaci $\{\tau_2(\eta)\}$ dla $\eta \in D_\beta$ z definicji metryki w Lemacie 3 oraz z Lematu 1 znajdują się w odległości $\geqslant 15$ od $\tau_1(\xi)$. Ponownie z Obserwacji 3 mamy, że $X \times \{\theta\}$ (który odpowiada $X \times \{(1,1)\}$ z Lematu) znajduje się w odległości $\geqslant 1$ od pozostałych składowych E_ξ. Z Lematu 1 wynika więc, że wszystkie punkty z $E_\eta \setminus (X \times \{\theta\})$ dla $\eta \neq \xi$ znajdują się w odległości > 2 od $\tau_1(\xi)$.

Para odległości od $\tau_2(\xi)$ oraz $\tau_1(\xi)$ wyznacza więc jednoznacznie pozostałe składowe E_ξ (podobnie, jak w dowodzie Lematu 3 wyznaczane były one przez odległość od α), czyli analogiczne rozumowanie gwarantuje nam, że $g(A) = A$ dla dowolnego zbioru

$$A \in \mathcal{S} := \{X^n \times \{\xi\} | n \geqslant 1, \xi \in D_\beta\} \cup \{\{\xi\} | \xi \in S_*\}.$$

Stąd $g(E_\xi) = E_\xi$ dla dowolnego $\xi \in D_\beta$. Z (c') dostajemy, że $g = \widehat{(u_\xi)}_\beta$ na E_ξ dla pewnego $u_\xi \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ takiego, że

$$u_\xi^{(n)}(\kappa_n(\xi)) \in B_{\xi,n} \tag{9}$$

dla wszystkich $n \geqslant 2$. Ponieważ jednak wszystkie E_ξ przecinają się na izometrycznej kopii X (z dokładnością do przeskalowania przez stałą), dostajemy, że $u := u_\xi$ jest niezależne od wyboru $\xi \in D_\beta$, czyli $g = \widehat{u}_\beta|_{X_*}$.

Pozostaje udowodnić, że $u \in G$. Ponieważ wszystkie κ_n są surjektywne, to z (9) dostajemy, że $u^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ leży w domknięciu (w X^n) zbioru $\{f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) | f \in G\}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in X_0$. Ponieważ jednak

$$\mathrm{Iso}(X,\rho) \ni f \mapsto f|_{X_0} \in X^{X_0}$$

jest zanurzeniem (rozważamy X^{X_0} z topologią zbieżności punktowej), dostajemy, że u leży w domknięciu G w $\mathrm{Iso}(X,\rho)$. Podgrupa G jest domknięta, co kończy dowód $(*)$.

Z Lematu 7 istnieje metryka

$$\lambda : S_0 \times S_0 \to \{0\} \cup [1,2], \tag{10}$$

dla której $\mathrm{Iso}(S_0,\lambda) = \{\mathrm{id}_{S_0}\}$. Niech $w : S_* \to \{16,17\}^{S_0}$ będzie dowolną iniekcją. Definiujemy metrykę ν_* na $S_0 \sqcup S_*$ przez:

- $\nu_* = \mu|_{S_* \times S_*}$ na $S_* \times S_*$,
- $\nu_* = \lambda$ na $S_0 \times S_0$,
- $\nu_*(\xi,\eta) = \nu_*(\eta,\xi) = [w(\xi)](\eta)$ dla $\xi \in S_*$, $\eta \in S_0$.

ν_* jest istotnie metryką, co wynika z (7), (10) oraz (8). Stosując ponownie Lemat 1 dla (X_*,μ) oraz $(S_0 \sqcup S_*, \nu_*)$ otrzymujemy metrykę ν' na $\widehat{X}_\beta \setminus \{\theta\} = S_0 \sqcup X_*$. Zauważmy, że dla dowolnego $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ zachodzi $\widehat{u}_\beta|_{S_0 \sqcup S_*} = \mathrm{id}|_{S_0 \sqcup S_*}$, więc również z Lematu 1 oraz z (6) mamy

$$\widehat{u}_\beta|_{S_0 \sqcup X_*} \in \mathrm{Iso}(S_0 \sqcup X_*, \nu') \text{ dla każdego } u \in G. \tag{11}$$

Rozszerzamy teraz metrykę ν' do metryki ν'' na $\widehat{X}_\beta$ przez $\nu''(\theta,\xi) = 32$ dla $\xi \in X_*$ oraz $\nu''(\theta,\xi) = 33$ dla $\xi \in S_0$.

Tak zdefiniowana ν'' jest metryką. Istotnie, podobnie jak wcześniej, można sprowadzić sprawdzenie nierówności trójkąta do przypadku, gdy największa odległość jest po lewej. Pokażemy w tym celu, że poza punktem θ mamy ograniczenie $v'' < 32$ (innymi słowy, że $\nu' < 32$).

Dla ν_* oraz μ nierówność jest spełniona. Pozostaje więc rozważyć takie pary punktów (x, y), że $x \in S_0$ oraz $y \in X_* \setminus S_*$. Wtedy $y \in E_\xi$ dla pewnego $\xi \in D_\beta$ i z Obserwacji 3 mamy, że $\nu'(y, \tau_1(\xi)) \leqslant 2$ (ν' pokrywa się tam z μ_ξ, a $\tau_1(\xi)$ odpowiada ω z Lematu), co w połączeniu z $\nu'(x, \tau_1(\xi)) \leqslant 17$ daje nam żądane szacowanie dla ν'' poza θ. Aby dowieść nierówność trójkąta dla ν'' wystarczy więc sprawdzić przypadek, gdy dokładnie jeden rozważany punkt to θ (poza punktem θ mamy ograniczenie $v'' < 32$), bez straty ogólności wystarczy więc sprawdzić, że

$$\nu''(\theta, z) \leqslant \nu''(\theta, y) + \nu''(y, z)$$

dla dowolnych różnych $x, y \in S_0 \sqcup X_*$. Mamy $32 \leqslant \nu''(\theta, y)$, więc jeśli $z \in X_*$, nierówność jest spełniona, załóżmy więc, że $z \in S_0$. Wtedy jeśli $y \in S_0$, nierówność jest również spełniona, załóżmy więc, że $y \in X_0$. Prawa strona szacuje się wtedy z dołu przez $32 + 16$, czyli nierówność zachodzi.

Od ostatecznej metryki dzieli nas tylko przeskalowanie przez $2M$, dla ułatwienia zapisu sprawdzimy jednak odpowiednik (a) dla ν'' (grupa izometrii nie zmieni się po przeskalowaniu metryki). Fakt, że odwzorowanie w (a) jest dobrze zdefiniowane wynika z (11) oraz definicji ν'' dla θ. Niech $g \in \mathrm{Iso}(\widehat{X_\beta}, \nu'')$. Ponieważ θ jest jedynym punktem, dla którego liczba punktów odległych (w metryce ν'') o 33 jest większa od jeden (ponieważ poza θ zachodzi $\nu'' < 32$), mamy $g(\theta) = \theta$. Stąd, $g(X_*) = X_*$ oraz $g(S_0) = S_0$. Ponieważ $\mathrm{Iso}(S_0, \lambda)$ jest trywialna, a ν rozszerza λ, mamy

$$g|_{S_0} = \mathrm{id}_{S_0}\,. \tag{12}$$

Z iniektywności w oraz definicji ν_* dostajemy dla $\xi, \eta \in S_*$, że $\nu''(\xi, \cdot) = \nu''(\eta, \cdot)$ na S_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi = \eta$. W połączeniu z $(*)$ dostajemy, że istnieje $u \in G$ takie, że $g = \widehat{u}_\beta$ na X_*. Z (12) dostajemy, że $g = \widehat{u}_\beta$, co kończy dowód (a).

Na koniec zdefiniujmy $\nu = 2M\nu''$. Wprost z konstrukcji dostajemy, że warunki (b) i (c) są spełnione. $\square$

Propozycja ta prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9. *Niech (G, ρ) będzie grupą wyposażoną w ograniczoną, obustronnie niezmienniczą metrykę ρ. Wtedy istnieje przestrzeń metryczna (E, ν) taka, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z*

$$(\mathrm{Iso}(E, \nu), \nu_{\sup}).$$

Ponadto:

- *(E, ν) jest iso-nice.*
- *$w(E) = \max(\aleph_0, w(G))$.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E, ν) też.*

Dowód. Jeśli G jest ośrodkowa, tezę dostajemy z Twierdzenia 7. Jeśli nie, oznaczmy przez β ciężar topologiczny G. Możemy powtórzyć dowód Twierdzenia 7, stosując Propozycję 3 zamiast Propozycji 1. Jeśli G nie jest skończona, wprost z konstrukcji mamy $w(E') \leqslant w(G)$. $\square$

4.2. **Przypadek nieośrodkowy, nieograniczony.** Przedstawimy teraz modyfikacje, dzięki którym otrzymamy analogiczne wyniki dla przypadku nieograniczonego. Dużą część potrzebnych zmian już omówiliśmy w przypadku ośrodkowym (lematy, które stosujemy w przypadku nieośrodkowym są identyczne jak te stosowane w ośrodkowym). Podobnie jak wcześniej, dostaniemy przestrzeń ograniczoną, której izometrie odpowiadają izometriom oryginalnej przestrzeni (która, ponownie, może być nieograniczona). Zmodyfikujemy ją poprzez dorzucenie przeliczalnie wielu ograniczonych przestrzeni w sposób analogiczny do przypadku ośrodkowego, aby otrzymać pożądany wynik. Udowodnimy następujące Twierdzenie, które w połączeniu z Twierdzeniami 7, 8 i 9 daje nam wprost Twierdzenie 6.

Twierdzenie 10. *Niech (G, ρ) będzie grupą wyposażoną w obustronnie niezmienniczą metrykę ρ. Wtedy istnieje iso-ograniczona przestrzeń metryczna (E', ν') taka, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z*

$$(\mathrm{Iso}(E', \nu'), \nu'_{\sup}).$$

Ponadto:

- *(E', ν') jest iso-nice.*
- *$w(E') = \max(\aleph_0, w(G))$.*
- *Jeśli (G, ρ) jest zupełna, to (E', ν') też.*

Podobnie jak wcześniej, powyższe twierdzenie podaje (w pełnej ogólności) modele (z dokładnością do izometrycznego izomorfizmu) dla grup topologicznych wyposażonych w metryki obustronnie niezmiennicze.

W dowodzie będziemy potrzebować odpowiednika Propozycji 3 dla przypadku nieośrodkowego, przedstawimy go więc przed dowodem powyższego twierdzenia.

Propozycja 4. *Niech β będzie nieskończoną liczbą kardynalną, D_β będzie przestrzenią dyskretną mocy β z wyróżnionym punktem $\theta \in D_\beta$, niech (X, ρ) będzie niepustą przestrzenią metryczną taką, że $w(X) \leqslant \beta$ oraz niech G będzie domkniętą podgrupą $\mathrm{Iso}(X, \rho)$. Wtedy istnieje metryka ν na $\widehat{X}_\beta$ taka, że:*

(a) Odwzorowanie

$$G \ni u \mapsto \widehat{u}_\beta \in \mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta, \nu)$$

jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem grup topologicznych.

(b) $X \times \theta \subset \widehat{X}_\beta$ jest izometryczną kopią $(X, \rho \wedge 2)$ oraz każdy inny składnik rozłącznej sumy w $\widehat{X}_\beta$ jest albo punktem, albo kopią $(X, \frac{\rho \wedge 2^n}{2^{2n}})$ lub $(X^{(n)}, \frac{\rho^{(n)} \wedge 2^n}{2^{2n}})$, w szczególności zachodzi $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2 = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$ dla $u, v \in G$.

(c) Jeśli (X, ρ) jest zupełna, to $(\widehat{X}_\beta, \nu)$ też.

(d) $\nu < 2^8$

Dowód. Powtarzamy dowód Propozycji 3, jednak na początku nie skalujemy metryki ρ przez stałą M, tylko zostawiamy ją bez zmian. W dalszej części dowodu, za każdym razem, kiedy korzystaliśmy z Lematu 3, korzystamy z Lematu 6. Ponownie, reszta dowodu (z dokładnością do skalowania przez stałą na końcu) się przenosi, ponieważ nie korzystamy nigdzie z tego, jak dokładnie wygląda metryka z Lematu 3, potrzebne są jedynie własności odległości pomiędzy składnikami sumy rozłącznej, które się zachowują (Obserwacja 5). Na koniec zamiast skalować metrykę przez $2M$, skalujemy przez 4, w szczególności $\nu < 2^8$. □

Możemy teraz przejść do dowodu głównego wyniku.

Dowód Twierdzenia 10. Podobnie jak w przypadku ośrodkowym, zaczynamy od przeniesienia dowodu Twierdzenia 9, ale zamiast z Propozycji 3, korzystamy z Propozycji 4. Otrzymaną przestrzeń oznaczamy (E, ν), przez θ oznaczamy punkt wyróżniony ze zbioru D_β w Propozycji 4.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 8, nie dostajemy od razu $\rho_{\sup}(u, v) = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$, tylko $\rho_{\sup}(u, v) \wedge 2 = \nu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$, więc aby otrzymać tezę należy zmodyfikować E. Mamy $\nu < 2^8$.

Rozważmy $H = \{\gamma\} \sqcup E$ oraz $K = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X \times \{n\}$ takie, że H oraz K przecinają się na kopii X (utożsamiamy $X \times \{\theta\}$ w H z $X \times \{1\}$ w K). Definiujemy ν_H na H przez:

- $\nu_H | E = \nu$
- $\nu_H(\gamma, x) = \nu_H(x, \gamma) = 2^8$ dla wszystkich $x \in E$

oraz ν_K na K przez:

- $\nu_K|_{X \times \{n\}} = (\rho \wedge 2^n) \times n$ dla $n \geqslant 1$
- $\nu_K((x,k),(y,n)) = \nu_K((y,n),(x,k)) = 2^{n+7} - 2^{k+7} + \rho(x,y) \wedge 2^k$ dla $x \in X$, $n \geqslant k \geqslant 1$

Cała reszta dowodu przenosi się z dowodu Twierdzenia 8 w następujący sposób.

W dowodzie, że ν_H i ν_K są metrykami trzeba zwiększyć o 2 wykładnik 2 w odpowiednich miejscach (ponieważ ograniczenie ν w tym przypadku jest cztery razy większe). Dowód jest analogiczny do momentu otrzymania (E', ν') (za pomocą sklejenia K i H z Lematu 1).

Dla ustalonego $\phi \in \mathrm{Iso}(E', \nu')$ mamy z konstrukcji, że dla wszystkich $x \in E' \setminus \{\gamma\}$ odległość $\nu'(\gamma, x)$ jest postaci 2^n dla pewnego naturalnego $n \geqslant 8$. Potrzebujemy pokazać, że γ jest jedynym punktem o tej własności. Tutaj dowód również się przenosi, jednak zamiast α, które miało odległość $13 < 16$ od dowolnego punktu z $X \times \{1\}$ stosujemy θ (przypomnijmy, że zgodnie z konwencją przyjętą w Definicji 5 utożsamiamy go z $X^0 \times \theta$), którego odległość od $X \times \{1\}$ (utożsamionego z $X \times \{\theta\}$) wynosi $33 < 64$. Dostajemy więc, jak wcześniej, szukany izometryczny izomorfizm, który implikuje w szczególności iso-ograniczoność E'.

Dowody iso-nice oraz zupełności przenoszą się bez zmian; o ile G nie jest skończona, wprost z konstrukcji mamy $w(E') \leqslant w(G)$. $\square$

5. Ośrodkowe modele dla grup nieośrodkowych

Pokazaliśmy już, że każdą ośrodkową grupę z metryką obustronnie niezmienniczą możemy modelować jako grupę izometrii przestrzeni ośrodkowej. Grupa izometrii przestrzeni ośrodkowej może jednak nie być ośrodkowa w topologii jednostajnej (wystarczy rozważyć grupę izometrii przeliczalnej przestrzeni dyskretnej), można więc zastanawiać się nad następującym problemem.

Problem 1. Scharakteryzować grupy z metryką obustronnie niezmienniczą, które można modelować jako grupy izometrii ośrodkowych przestrzeni metrycznych.

W niniejszej pracy nie podajemy takiej charakteryzacji, z przedstawionych wyników możemy jednak otrzymać następujące twierdzenie. Jest to również wynik jeszcze nie opublikowany.

Twierdzenie 11. *Niech (G, ρ) będzie grupą wyposażoną w obustronnie niezmienniczą metrykę ρ oraz niech (E, ν) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną taką, że (G, ρ) jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathrm{Iso}(E, \nu), \nu_{\sup})$. Niech $(H, \rho|_H)$ będzie podgrupą domkniętą (G, ρ). Wtedy istnieje ośrodkowa przestrzeń metryczna (F, μ) taka, że grupa $(H, \rho|_H)$ jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathrm{Iso}(F, \mu), \mu_{\sup})$. Dodatkowo, jeśli (E, ν) jest ograniczona, (F, μ) jest ograniczona.*

Dowód. Zaczniemy od przypadku ograniczonego. Stosujemy Propozycję 1 do (E, ν) oraz H, otrzymaną przestrzeń oznaczmy przez (F, μ). Wprost z (b) w tezie propozycji dostajemy, że jest to szukana przestrzeń.

Przechodzimy do przypadku nieograniczonego. Stosujemy Propozycję 2 do (E, ν) oraz H, otrzymaną przestrzeń oznaczmy przez (F', μ'). Jak wcześniej, nie dostajemy od razu izometrycznego izomorfizmu, lecz $\nu_{\sup}(u, v) \wedge 2 = \mu_{\sup}(\widehat{u}, \widehat{v})$ na H. Aby otrzymać tezę, musimy zmodyfikować (F', μ'), możemy to zrobić powtarzając fragment dowodu Twierdzenia 8 (od momentu, kiedy tam modyfikowana jest (E, ν)). Otrzymaną przez tę modyfikację przestrzeń oznaczamy przez (F, μ), jest ona izometrycznie izomorficzna z H. $\square$

6. Możliwa kontynuacja przedstawionych badań

Poza problemem przedstawionym w poprzedniej sekcji, chcielibyśmy zwrócić uwagę na kilka innych.

M. Malicki i S. Solecki w [2] udowodnili, że każda lokalnie zwarta grupa polska jest izomorficzna z grupą izometrii przestrzeni z własnością Heinego-Borela (przestrzeń metryczna ma własność Heinego-Borela wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kule domknięte w tej przestrzeni są zwarte). Można zapytać o analogon tego wyniku dla grup z metryką obustronnie niezmienniczą.

Problem 2. Czy każda grupa z metryką obustronnie niezmienniczą spełniająca własność Heinego-Borela jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej iso-nice, iso-ograniczonej przestrzeni metrycznej z własnością Heinego-Borela?

Problem 3. Scharakteryzować grupy izometrii iso-ograniczonych przestrzeni metrycznych z własnością Heinego-Borela wśród grup wyposażonych w metryki obustronnie niezmiennicze.

7. Podziękowania

Chciałbym podziękować dr. hab. Piotrowi Niemcowi, prof. UJ za zwrócenie mojej uwagi na jego konstrukcję w pracy [4], sugestie, że po modyfikacji można ją wykorzystać w przypadku zwartym i wiele innych cennych uwag.

Literatura

[1] S. Gao, A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry*, Mem. Amer. Math. Soc. **766** (2003).

[2] M. Malicki and S. Solecki, *Isometry groups of separable metric spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146**:1 (2009), 67–81.

[3] J. Melleray, *Compact metrizable groups are isometry groups of compact metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**:4 (2008), 1451–1455.

[4] P. Niemiec, *Isometry groups among topological groups*, Pacific J. Math. **266** (2013), 77–116.

[5] A. Polański, *Isometric models for separable groups with a bi-invariant metric*, Topol. Appl. **289** (2021), 107486.

[6] R. Saerens, W.R. Zane, *The isometr groups of manifolds and the automorphism groups of domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 413-429.

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland

Email address: `artur.polanski@uj.edu.pl`