Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Artura Polańskiego. Maciej Malicki

Rozprawa doktorska mgr. Artura Polańskiego, napisana pod kierunkiem dr. hab. Piotra Niemca, dotyczy problematyki modelowania grup metrycznych jako pełnych grup izometrii przestrzeni metrycznych. Łatwo wykazać, że każdą grupę metryczną G można z dokładnością do topologicznego izomorfizmu przedstawić jako podgrupę (pełnej) grupy izometrii $\mathrm{Iso}(E)$ pewnej przestrzeni metrycznej E. Sytuacja jednak komplikuje się znacząco, jeżeli oczekujemy by grupa G była izomorficzna z całą grupą $\mathrm{Iso}(E)$, by izomorfizm zachowywał również np. metrykę, albo by własności przestrzeni E w pewien sposób odzwierciedlały własności grupy G. W recenzowanej pracy Autor koncentruje się na izomorfizmie metrycznym oraz własnościach zupełności, zwartości i lokalnej zwartości.

Omówienie wyników

Rozdziały 1 i 2: wstęp, notacja i terminologia

Autor rozpoczyna od nader krótkiego, liczącego dokładnie jedną stronę, wprowadzenia w tematykę badawczą pracy doktorskiej. Następnie omawia plan pracy oraz wprowadza techniczną notację i terminologię stosowaną w kolejnych rozdziałach.

Rozdział 3

W tym rozdziale Autor dowodzi, że dla każdej grupy metrycznej G z obustronnie niezmienniczą metryką istnieje przestrzeń metryczna E taka, że G jest izometrycznie izomorficzna z grupą $\mathrm{Iso}(E)$ z metryką supremum. Co więcej, jeśli G jest zupełna, to E też jest zupełna, a jeśli G jest zwarta, to E też jest zwarta. Ta ostatnia własność prowadzi do wzmocnienia twierdzenia Mellereya, który udowodnił, że każda zwarta grupa metryzowalna jest topologicznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej przestrzeni zwartej.

Dodatkowo, jeśli G jest lokalnie zwarta, konstrukcja może zostać przeprowadzona w taki sposób, aby E również była lokalnie zwarta, choć niekoniecznie zupełna. Konstrukcja przestrzeni E w każdym przypadku daje też tzw. przestrzeń iso-nice, co oznacza, że na $\mathrm{Iso}(E)$ topologia zbieżności jednostajnej jest taka sama jak topologia zbieżności punktowej.

Autor przeprowadza dowód w dwóch krokach. Najpierw przedstawia konstrukcję, która wymaga dodatkowego założenia ograniczoności metryki na G. Następnie pokazuje, jak ją zmodyfikować, aby uwzględnić również przypadek metryki nieograniczonej. Prosta redukcja poprzez chwilową zamianę metryki na ograniczoną (np. postaci $1/(d+1)$) nie wystarczy, dlatego też Autor pracuje z kolejnymi ograniczonymi przybliżeniami (i przeskalowaniami) wyjściowej metryki. Uzyskana przestrzeń spełnia dodatkową własność iso-ograniczoności, tj. każda izometria $f \in \mathrm{Iso}(E)$ spełnia warunek $\sup_{e\in E} d(f(e), e) < \infty$.

Szkieletem dowodu jest konstrukcja z pracy [2], gdzie zaprezentowany został nowy dowód twierdzenia Gao-Kechrisa mówiącego, że każda grupa polska (tj. ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny) G jest topologicznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej polskiej przestrzeni metrycznej E. Skonstruowana tam przestrzeń E ma zasadniczo postać przeliczalnej liczby kopii przestrzeni G^n, gdzie $n \geqslant 1$. Dzięki odpowiedniemu doborowi metryki, izometrie E pochodzą od izometrii G, w tym sensie, że dla każdej takiej izometrii istnieje izometria $u \in \mathrm{Iso}(G)$ taka, że na każdej kopii G^n przekształcenie $f(e)$ jest postaci $(u(e), \ldots, u(e))$. Dodatkowo, na każdej kopii G^n przekształcenie f zachowuje się w przybliżeniu jak pewien element $g \in G$ (traktowany jako element $\mathrm{Iso}(G)$.) Ta dodatkowa własność ostatecznie zapewnia, że każdej izometrii E odpowiada element wyjściowej grupy G, a odpowiedniość ta ma charakter izometryczny.

Należy zaznaczyć, że w recenzowanej pracy doktorskiej dużo większa uwaga poświęcona jest konstruowanej na E metryce. Co więcej, przestrzeń skonstruowana w pracy [2] nigdy nie jest zwarta, w związku z czym Autor w odpowiedni sposób metrycznie ją uzwarca (o ile G była zwarta.) Te innowacje prowadzą do dużo bardziej technicznych (i dłuższych) dowodów. Argumentacja przedstawiona jest jednak klarownie, dzięki czemu czytelnik nie gubi się w tym dość skomplikowanym wywodzie.

Można przy okazji wspomnieć, że pewnym uproszczeniem przedstawionej w tym rozdziale konstrukcji byłoby, jak się wydaje, zastosowanie Claim 1 z Twierdzenia 2.1 w pracy [1]. Dzięki temu, zamiast kopii przestrzeni postaci G^n dla dowolnego $n \geqslant 2$, wystarczyłoby rozważać kopie przestrzeni postaci G^2.

Rodział 4

Rozdział ten poświęcony jest przypadkowi nieośrodkowemu. Bazuje on na wcześniejszych konstrukcjach i, podobnie jak tam, dowód rozbity jest na dwa kroki: dla metryki ograniczonej, a następnie dla nieograniczonej. Zasadnicza idea jest taka, że Autor w odpowiedni sposób iteruje konstrukcję dla przypadku ośrodkowego, tak aby zapewnić sobie przybliżanie izometrii X przez izometrie pochodzące od G również, wtedy gdy nie istnieje przeliczalny podzbiór gęsty w G. Następnie – dla metryk nieograniczonych – przybliża metrykę nieograniczoną metrykami ograniczonymi, analogicznie do przypadku ośrodkowego.

Ponieważ konstrukcje z tego rozdziału są rozwinięciem omówionych uprzednio, Autor skraca swój wywód. Zamiast przedstawiać całość argumentacji, wskazuje jedynie miejsca we wcześniejszych krokach, gdzie należy dokonać odpowiednich modyfikacji. Trochę szkoda, że zabrakło tu ilustracji, analogicznych do tych z rozdziału 3 ("wieża", której "piętrami" są kolejne potęgi X), które ułatwiałyby czytelnikowi wyrobienie sobie ogólnego obrazu strategii dowodowej. W ekspozycję wkrada się momentami pewien nieporządek. Na przykład, wydaje się, że do sformułowania Propozycji 3 nie jest potrzebna przestrzeń dyskretna D_β, a fakt, że odwzorowanie z punktu a) jest izomorfizmem topologicznym wynika już z punktu b). Z drugiej strony, nie jest dla mnie jasne, dlaczego stwierdzenie znajdujące się w punkcie b) po słowach "w szczególności" jest istotnie szczególnym przypadkiem tego, co powiedziane zostało wcześniej. Takich mankamentów jest więcej, dość rozbudowana notacja mogłaby też być odrobinę bardziej przemyślana. Nie zmienia to faktu, że, ogólnie rzecz biorąc, i ten rozdział napisany jest w sposób dość przejrzysty.

Dodam, że konstrukcję dla przypadku nieośrodkowego i ograniczonego można by zapewne (choć nie sprawdzałem szczegółów) przeprowadzić w sposób nieco bardziej ekonomiczny. Poza uproszczeniami wspomnianymi wcześniej, wydaje się, że w dowodzie Propozycji 3, Lemat 7 można by bezpośrednio zastosować do rodziny przestrzeni E_ξ (traktując je jako punkty), tak aby izometrie całości ustalały (setwise) każdą przestrzeń E_ξ. Eliminowałoby to konieczność użycia rodziny S_0, która, jak rozumiem, służy temu właśnie celowi.

Rozdział 5 i 6

W dwóch ostatnich, bardzo krótkich rozdziałach Autor omawia pewne problemy badawcze, które pojawiają się w kontekście pracy doktorskiej. Między innymi, zadaje pytanie o charakteryzację grup z metryką obustronnie niezmienniczą, które można izometrycznie modelować jako grupy izometrii ośrodkowych przestrzeni metrycznych. Autor zauważa, że klasa takich grup zamknięta jest na podgrupy domknięte.

Podsumowanie

Rozprawa doktorska mgr. Artura Polańskiego podejmuje interesującą i naturalną tematykę. Główne wyniki, częściowo już opublikowane, poszerzają wiedzę na temat grup metrycznych i sugerują kierunki dalszych badań. Dodać należy, że praca napisana jest w sposób dość przejrzysty. Szczególnie pierwsza część pozostaje w tym względzie bez zarzutu, część druga (tj. rozdział 4) jest nieco mniej uporządkowana, ale wciąż jak najbardziej czytelna.

Mój główny zarzut dotyczy natomiast niemal całkowitego braku kontekstu dla przedstawionych rezultatów badań. Nie wpływa to oczywiście na ocenę ich jakości, praca doktorska jednak, jak mi się wydaje, powinna być czymś więcej niż jedynie prezentacją końcowych wyników. W części wstępnej Autor poświęca na tę kwestię dokładnie jedną stronę – należy zaznaczyć, że wiele artykułów matematycznych jest pod tym względem zdecydowanie bardziej rozbudowanych. Przede wszystkim, brakowało mi jakiegokolwiek ogólnego wstępu do grup topologicznych i grup metrycznych. W pracy nie znalazło się nawet miejsce na sformułowanie twierdzenia Birkhoffa-Kakutaniego, które wyjaśnia, dla jakich grup topologicznych w ogóle istnieje kompatybilna metryka, ani też na omówienie podstawowych typów i własności metryk. Jakie związki zachodzą różnymi własnościami metryk, np. zupełnością a lewo-, czy obu-stronną niezmienniczością? Jakie istnieją relacje pomiędzy topologicznymi, metrycznymi i algebraicznymi własnościami grup? Co można powiedzieć o grupie izometrii na podstawie własności samej przestrzeni? Niestety Autor nie podejmuje próby przedstawienia, choćby w najbardziej szkicowy sposób, podstaw zajmującej go dziedziny.

Jest to istotnie choćby z tego powodu, że Autor rozważa w pracy bardzo konkretny typ grup metrycznych, tj. grupy z metryką obustronnie niezmienniczą. Czytelnik jednak bardzo niewiele o nich się dowiaduje. Jedyny ogólna wzmianka pojawia się niejako przy okazji, w środku pracy, gdzie Autor dowodzi znanego faktu, że kompatybilna metryka obustronnie niezmiennicza istnieje zawsze dla metryzowalnych grup zwartych. A co z grupami lokalnie zwartymi, które również pojawiają się w pracy? Wiadomo, że istnieją metryzowalne grupy lokalnie zwarte bez kompatybilnej metryki obustronnie niezmienniczej i to wyjaśnia, dlaczego w punkcie e) Propozycji 1 mowa jest o tym, że choć dla X lokalnie zwartej jako przestrzeń E można znaleźć przestrzeń lokalnie zwartą, ale już niekoniecznie zupełną. Innymi słowy, wynik ten jest w pewnym sensie optymalny, a powyższe wyjaśnienie stanowiłoby dla niego dodatkową motywację.

Poza elementarnym wprowadzeniem, jak najbardziej wydawałoby się też na miejscu, aby szerzej omówić stan współczesnych badań. Można tutaj choćby wspomnieć o wynikach Vershika oraz Douchy, którzy zajmowali się pokrewnymi problemami, dotyczącym struktury grupowej, którą można zdefiniować na ustalonej przestrzeni metrycznej (np. przestrzeni Urysohna.) W ostatnich latach podejmowano też studia nad obiektami uniwersalnymi w kontekście grup metrycznych – jest to tematyka powiązana z pojawiającymi się w pracy kwestiami charakteryzacji różnych klas grup. Wyniki recenzowanej pracy doktorskiej można uznać za interesujące również dlatego, że intensywnie rozwijana jest obecnie tzw. logika ciągła, pozwalająca na zastosowanie narzędzi logicznych w badaniach obiektów wyposażonych w metrykę. Podsumowując, przedstawienie *state-of-the-art* pomogłoby uzasadnić wybór problematyki podjętej w recenzowanej pracy doktorskiej.

Mimo wskazanych mankamentów, uważam, że praca spełnia wymogi niezbędne do ubiegania się o stopień doktora nauk matematycznych. Wnioskuję zatem o dopuszczenie mgr. Artura Polańskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Literatura

[1] M. Malicki, S. Solecki, *Isometry groups of separable metric spaces*, Math. Proc. Cambridge Math. Soc. 146 (2009), 67-81.

[2] P. Niemiec, *Isometry groups among topological groups*, Pacific J. Math. 266 (2013), 77–116.

30.09.2021