Prof. dr hab. Paweł Krupski 09.09.2021

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Artura Polańskiego "Izometryczne modele dla grup z metryką obustronnie niezmienniczą"

Rozprawa jest 38-stronicową, rozszerzoną wersją 10-stronicowej pracy [5] A. Polańskiego *Isometric models for separable groups with a bi-invariant metric*, Topology Appl. 289 (2021). Jej tematyka dotyczy klasycznego zagadnienia—kiedy grupa topologiczna jest (topologicznie) izomorficzna z grupą homeomorfizmów lub izometrii przestrzeni topologicznej? W bezpośrednim tle są rezultaty S. Gao i A. Kechrisa [1] (2003) o izomorfizmie topologicznym dowolnej grupy polskiej z grupą izometrii przestrzeni polskiej oraz analogiczne J. Mellaraya [3] (2008) dla metryzowalnych grup zwartych, M. Malickiego i S. Soleckiego [2] (2009) dla lokalnie zwartych grup polskich oraz P. Niemca [4] (2013), który odmiennymi metodami pokazał reprezentacje wymienionych typów grup jako grup izometrii odpowiednio na przestrzeni l_2, kostce Hilberta i kostce Hilberta bez punktu z odpowiednimi metrykami.[1]

Główne wyniki rozprawy są zawarte w następujących czterech twierdzeniach, z których pierwsze dwa są opublikowane w [5], a pozostałe dwa składają się na Conjecture 1 z [5] i mają tu przedstawione pełne dowody.

Twierdzenie 7. *Jeśli (G, ρ) jest grupą ośrodkową z ograniczoną metryką obustronnie niezmienniczą ρ, to istnieje ograniczona, ośrodkowa przestrzeń metryczna (E, ν), której grupa izometrii $Iso(E, \nu_{\sup})$ jest izometrycznie izomorficzna z (G, ρ). Przestrzeń (E, ν) jest iso-nice, tzn. topologia zbieżności jednostajnej w $Iso(E, \nu_{\sup})$ pokrywa się z topologią zbieżności punktowej. Ponadto, jeśli (G, ρ) jest zupełna (zwarta, lokalnie zwarta), to przestrzeń (E, ν) też jest taka, odpowiednio.*

Twierdzenie 8. *Jeśli (G, ρ) jest grupą ośrodkową z nieograniczoną metryką obustronnie niezmienniczą ρ, wtedy istnieje ośrodkowa przestrzeń metryczna (E', ν'), która jest izo-ograniczona (tzn. każda izometria na E' jest ograniczona), której grupa izometrii $Iso(E', \nu'_{\sup})$ jest izometrycznie izomorficzna z (G, ρ). Przestrzeń (E', ν') jest także iso-nice oraz jeśli (G, ρ) jest zupełna (lokalnie zwarta), to przestrzeń (E', ν) też jest taka, odpowiednio.*

Dla grup nieośrodkowych udowodnione są analogiczne Twierdzenia 9 i 10, będące odpowiednikami Twierdzeń 7 i 8, przy czym otrzymane przestrzenie (E, ν) i (E', ν') mają ciężar równy ciężarowi grupy (G, ρ) oraz są zupełne, gdy (G, ρ) jest zupełna; o lokalnej zwartości Twierdzenia 9 i 10 nie wspominają.

[1] W kontekście powyższych badań warto byłoby wspomnieć o pionierskiej pracy J. de Groota, *Groups represented by homeomorphism groups I*, Math. Annalen 138 (1959), 80–102, w której pokazano algebraiczny izomorfizm dowolnej grupy z grupą izometrii pewnej 1-wymiarowej, spójnej, lokalnie spójnej przestrzeni zupełnej.

Rozprawa wiąże się mocno z pracą Piotra Niemca [4], w której znajdują się analogiczne wyniki, ale w kategorii topologicznej, tzn. izomorfizmy są homeomorfizmami. Idea konstrukcji przestrzeni E i E' pochodzi również z [4] i jest odpowiednio zmodyfikowana. Najistotniejsze jest określenie w tych przestrzeniach odpowiednich metryk. Wydają sie one naturalne, ale rachunki, sprawdzające ich własności, są już technicznie złożone. W Twierdzeniu 8 metryka ν' powstaje w sposób podobny do metryki ν w Twierdzeniu 7 poprzez subtelne skalowania na składnikach tworzących zbiór E'.

Dowodząc Twierdzenie 9, autor również modyfikuje konstrukcje z [4]. W przypadku metryki nieograniczonej na G w Twierdzeniu 10, konstrukcja metryki ν' jest wzorowana na konstrukcji z dowodu Twierdzenia 8.

Twierdzenia 7-10 składają się na eleganckie

Twierdzenie 6. *Jeśli (G, ρ) jest grupą z metryką obustronnie niezmienniczą ρ, to istnieje przestrzeń metryczna (E, ν), której grupa izometrii $Iso(E, \nu_{\text{sup}})$ jest izometrycznie izomorficzna z (G, ρ). Przestrzeń (E, ν) jest iso-nice, izo-ograniczona, ma ciężar równy ciężarowi przestrzeni (G, ρ), gdy G jest nieskończona, oraz jeśli (G, ρ) jest zupełna (zwarta), to przestrzeń (E, ν) też jest taka, odpowiednio.*

Z Twierdzenia 6 wynika bezpośrednio rezultat J. Malleraya.

W sekcjach 5 i 6 autor formułuje kilka interesujących problemów, między innymi pyta, które grupy nieośrodkowe z metryką obustronnie niezmienniczą realizują się jako grupy izometrii przestrzeni ośrodkowych i czy każda grupa z metryką obustronnie niezmienniczą, w której kule domknięte są zwarte (tzw. własność Heinego-Borela) jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej przestrzeni metrycznej z własnością Heinego-Borela.

Rozprawa jest napisana klarownie. Autor wyjaśnia idee dowodów i przeprowadza większość rachunków szczegółowo (czasami aż zanadto; na przykład sprawdzanie własności metryki d z Lematu 1 jest prostym ćwiczeniem, podobnie podawanie dowodu Lematu 4 jest zbędne). Oprócz kilku "literówek" (np. w Lemacie 5 (f) powinno być λ zamiast μ, w Lemacie 7 brakuje nierówności $0 < a$) nie zauważyłem innych pomyłek.

Konkluzja. Uważam, że przedstawione w rozprawie wyniki są wartościowe i dobrze wpisują się w aktulne badania w tej tematyce. Rozprawa spełnia warunki wymagane w ustawie "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce". Oceniam ją pozytywnie.

Paweł Krupski