Prof. dr hab. Stanisław Spodzieja
Katedra Funkcji Analitycznych
i Równań Różniczkowych,
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 8 lutego 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Białożyta pod tytułem "Medial Axis and Singularities" (Szkielety zbiorów i osobliwości)

Tematyka rozprawy mieści się w rzeczywistej geometrii algebraicznej i zachacza o trudne zagadnienia dotyczące osobliwości. Podstawowym pojęciem rozważanym w pracy jest szkielet zbioru definiowalnego w pewnej o-minimalnej strukturze.

Zacznijmy od definicji. Niech $(\mathcal{X}, d)$ będzie przestrzenią metryczną i niech $X \subset \mathcal{X}$ będzie zbiorem domkniętym. Przez d_X oznaczamy funkcję odległości od zbioru X (w metryce d). Dla każdego punktu $a \in \mathcal{X}$ zbiór punktów zbioru X, które są najbliższe punktowi a oznaczamy przez $m_X(a)$, to znaczy $m_X(a) = \{x \in X : d(a,x) = d_X(a)\}$. Przez *szkielet zbioru* X rozumiemy zbiór tych punktów a przestrzeni $\mathcal{X}$ dla których zbiór $m_X(a)$ ma co najmniej dwa punkty. Oznaczamy go symbolem M_X. Oczywiście $X \cap M_X = \emptyset$.

Pojęcie szkieletu zbioru jest rozważane w różnych gałęziach matematyki i informatyki jak: równania różniczkowe cząstkowe, geometria analityczna, matematyka stosowana, czy w teorii rozpoznawaniu obrazów. Różnie też jest nazywane w literaturze. Jest ono intensywnie badane w wielu ośrodkach naukowych na świecie. Leży w kręgu zainteresowań wielu matematyków, między innymi: Lev Birbrair, Harry Blum, Frédéric Chazal, Maciej Denkowski, Paul Erdös, Herbert Federer, David Fremlin, John Nash, Dirk Siersma, Rémi Souffet, Yosef Yomdin, Luděk Zajíček, ...

Praca doktorska obejmująca 71 stron, składa się z sześciu rozdziałów z których pierwszy jest wstępem, opatrzona jest abstraktem, spisem symboli i spisem literatury. W rozdziale pierwszym Autor dość dobrze umiejscawia tematykę pracy. Wskazuje tu problemy, które chce rozwiązać i nawiązuje do znanych wyników. Dość dokładny przegląd literatury związany z temtyką pracy robi w rozdziale drugim.

W rozdziale trzecim najpierw omawia pojęcia *zbieżności rodziny zbiorów w sensie Kuratowskiego*, *górnego* i *dolnego stożka Peano* oraz *stożka normalnego*. Górny stożek Peano zbioru X w punkcie a oznacza C_aX, a stożek normalny – N_aX. Dalej przypomina podstawowe własności *zbiorów* i *funkcji definiwalnych* w o-minimalnej strukturze, a zasadniczą część tego rozdziału poświęca wprowadzeniu pojęcia szkieletu zbioru i omówieniu jego własności w przypadku zbiorów definiowalnych w pewnej o-minimalnej strukturze w $\mathbb{R}^n$. Pokazuje tutaj że szkielet zbioru definiowalnego ma puste wnętrze (twierdzenie 3.17). Nie wiadomo, czy zachodzi to w przypadku ogólnym.

W rozdziale tym Autor omawia pojęcie *zbioru konfliktowego* $Conf_{\mathcal{X}}\mathfrak{X}$ dla skończonej rodziny zbiorów rozłącznych $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$, $k > 1$, w przestrzeni $\mathcal{X}$:

$$Conf_{\mathcal{X}}(\mathfrak{X}) = \{x \in \mathcal{X} : \exists i \neq j \;\; x \in Ter_{\mathcal{X}}(X_i, \mathfrak{X}) \cap Ter_{\mathcal{X}}(X_j, \mathfrak{X}),$$

gdzie $Ter_{\mathcal{X}}(X_i, \mathfrak{X}) = \{x \in \mathcal{X} : \forall j \; d(x, X_i) \leq d(x, X_j)\}$. Wprowadza również pojęcie *zbioru centralnego* C_X dla danego zbioru domkniętego $X \subset \mathbb{R}^n$, to jest zbioru środków wszystkich maksymalnych ze wzgledu na relacje inkluzji kul otwartych i rozłącznych ze zbiorem X. Jest to zbiór w pewnym sensie bliski szkieletowi zbioru, zachodzi bowiem $M_X \subset C_X \subset \overline{M_X}$ (patrz twierdzenie 3.27), jednak zbiory te mogą być różne, co Autor uzasadnia przykładami w uwadze 3.28. Pokauje też istnienie pochodnych kierunkowych funkcji odległości od zbioru domknietego w każdym punkcie dopełnienia tego zbioru (twierdzenie 3.30).

Wiadomo, że multifunkcja

$$m_X : \mathbb{R}^n \ni a \mapsto m_X(a) \subset \mathbb{R}^n$$

jest definiowalna, co otrzymujemy między innymi z wyników M. Denkowskiego. Multifunkcja ta jest również półciągła z góry w $\mathbb{R}^n$ w sensie zbieżności Kuratowskiego (patrz propozycja 3.34). W rozdziale tym Doktorant omawia też własności *zbioru normalnego* $\mathcal{N}(a)$ i *jednowartościowego zbioru normalnego* $\mathcal{N}'(a)$ dla $a \in X$, to znaczy

$$\mathcal{N}(a) = \{x \in X : a \in m(x)\}, \qquad \mathcal{N}'(a) = \{x \in X : m(x) = \{a\}\}.$$

Omawia tutaj również liczbę $reach(X) = \inf\{d_{M_X}(x) : x \in X\}$ oraz tak zwany *promień osięgania* (tłumaczenie "reaching radius" z języka angielskiego przez piszącego opinię).

Główne wyniki pracy znajdują się w rozdziale czwartym. Do najważniejszych wyników pracy, według piszącego opinię, można zaliczyć twierdzenia 4.6, 4.8, 4.20 oraz wnioski 4.19 i 4.23.

Wykorzystując własnosci pochodnej kierunkowej funkcji odległości Doktorant dowodzi

Twierdzenie 4.6. *Dla każdego domknietego i definiowalengo zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$, zakładając że $0 \in \overline{M_X}$, zachodzi*

$$M_{m(0)} \subset C_0 M_X.$$

W ogólnym przypadku równość w powyższym twierdzeniu nie musi zachodzić, jednak przy dodatkowym założeniu, Autor otrzymuje

Twierdzenie 4.8. *Załóżmy, że $0 \in M_X$ dla pewnego zbioru domknietego i definiowalnego $X \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli istnieje otoczenie początku układu współrzędnych U oraz $r > 0$ takie, że dla każdego $a \in U \cap M_X$ zachodzi diam $m(a) > r$, to $C_0 M_X = M_{m(0)}$.* Tutaj diam $m(a)$ oznacza średnicę zbioru $m(a)$.

Z twierdzenia 4.6 wynika wniosek 4.10., że $\dim_a M_X \geq \dim M_{m(a)}$. W oparciu o ten wniosek Autor dowodzi ciekawy (chociaż znany)

Wniosek 4.11. *Punkt $a \in M_X$ jest izolowanym punktem zbioru M_X wtedy i tylko wtedy, gdy $m(a)$ wypełnia sferę o środku w punkcie a i promieniu $d(a)$.*

Wykorzystując półciągłość z góry funkcji m_X w $\mathbb{R}^n$ w sensie zbieżności Kuratowskiego (patrz propozycja 3.34), Autor dowodzi propozycję 4.18 o ciągłości funkcji $m_X|M_X$ w punktach wewnętrznych zbioru M_X względem pewnwgo rozkładu cylindrycznego przystosowanego do wykresu $m|M_X$. W oparciu o tę propozycję, uzyskuje ciekawy

Wniosek 4.19. *Zbiór* $\{a \in M_X : C_a M_X = M_{m(a)}\}$ *jest otwarty i gęsty w* M_X.

Najciekawsze i zasadnicze wyniki pracy, według piszącego opinię, znajdują się w punkcie 4.2, gdzie Autor uzupełnia wyniki M. Denkowskiego o związku między wymiarem zbioru $M^k = \{a \in M_X : \dim m(a) = k\}$ i wymiarem $m(a)$:

$$\dim M^k + \dim m(a) \leq n - 1.$$

Mianowicie dowodzi On:

Twierdzenie 4.20. *Niech* $\mathcal{D}$ *będzie rozkładem cylindrycznym* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *przystosowanym do wykresu* $m|M_X$. *Jeśli* $x_0 \in M_X$ *jest punktem wewnętrznym zbioru* M_X *wzgledem rozkładu* $\mathcal{D}$, *to zachodzi równość*

$$\dim_{x_0} M_X + \dim m(x_0) = n - 1.$$

W oparciu o Twierdzenie 4.20 podaje wzmocnienie wcześniejszych wyników Albano i Cannarsa, Denkowskiego i Erdösa:

Theorem 4.21. *Dla każdego punktu* $a \in M_X \subset \mathbb{R}^n$, *zachodzi*

$$\dim_a M_X + \min\{k : a \in \overline{M^k}\} = n - 1.$$

Z tego twierdzenia wyciąga natychmiastowy lecz ciekawy wniosek

Wniosek 4.23. *Dla każdego domkniętego i definiowalnego zbioru* $X \subset \mathbb{R}^n$,

$$\dim M_X = n - 1 - \min_{a \in M_X} \dim m(a).$$

w szczególności $\dim M_X \geq n - 1 - \dim X$.

W punkcie 4.3 pan Białożyt podejmuje próbę scharakteryzowania osobliwości "wykrytych" przez szkielety zbiorów w języku granic promieni osiągania i ich ciągłości w zbiorze $Reg_2 X$.

Inspiracją do badań w punkcie 4.4 był Lematem Nasha o istnieniu otoczenia U rozmaitości $X \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^k, $k \geq 2$, takiego, że $M_X \cap U = \emptyset$ oraz funkcja $m|U : U \to X$ jest klasy C^{k-1}. W szczególności $Reg_2 X \cap \overline{M_X} = \emptyset$. W oparciu o zbiór $\mathcal{SQ}(X)$ punktów *superkwadratowości* zbioru X (patrz definicja 4.41), Autor dowodzi

Twierdzenie 4.46. *Niech* X *będzie definiowalnym (i domkniętym) podzbiorem* $\mathbb{R}^n$ *takim, że* $0 \in Sing_2 X \cap Reg_1 X$. *Wówczas* $0 \in \overline{M_X}$, *jeśli* $0 \in \mathcal{SQ}(X)$.

Przy dodatkowym założeniu, że X jest definiowalną krzywą w wielomianowo ograniczonej strukturze o-minimalnej, w twierdzeniu 4.47 pokazuje, że jeśli $0 \in \overline{M_X} \cap Reg_1 X$, to $0 \in \mathcal{SQ}(X)$. Z twierdzenia 4.46 wyciąga też ciekawy

Wniosek 4.48. *Dla zbioru domkniętego i definiowalnego* X, *zachodżi*

$$\overline{\mathcal{SQ}(X)} \subset \overline{M_X} \cap Rec_1 X.$$

Lytchak, Rataj, Zajíček udowodnili, że każda k-wymiarowa rozmaitośc topologiczna posiadająca dodatni zasięg Federera jest k-wymiarową rozmaitoscią klasy $C^{1,1}$. W świetle tego i lematu Nasha przytoczonego wyżej, naturalnym jest wykrywanie punktów osobliwych zbioru X przez badanie zbieżność promieni osiągania do zera w tych punktach. Taki sposób wykrywania tych punktów podjął Autor w punkcie 4.4.2, gdzie charakteryzuje punkty osobliwe x zbioru X w terminach zbieżności do zera promieni osiągania w ciągu punktów $x_\nu \in Reg_2X$ takich, że $x_\nu \to x$ (propozycje 4.54 i 4.55). Pokazuje w szczególności ciągłość tego promienia w zbiorze Reg_2X (propozycja 4.35). oraz, że promień Birbraira i Denkowskiego i wprowadzony w pracy pokrywają się (twierdzenie 4.37). Dowodzi też

Twierdzenie 4.57. *Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ będzie domknietą k-wymiarową rozmaitoscią topologiczną. Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarowym definiowalnym (i domkniętym) nadzbiorem zbioru Γ. Wówczas*

$$\Gamma \cap \overline{M_\Gamma} \subset G \cap \overline{M_G}.$$

W szczególności twierdzenie to pokazuje, że przyklejenie nowych kawałków do rozmaitości, do której zbliża się szkielet zbioru, nie może spowodować oddzielenia szkietetu od uzyskanej sumy.

Ostatnie dwa rozdziały poświęcone są omówieniu wyników i wskazaniu możliwych kierunków rozwoju.

Omówione powyżej wyniki są ciekawe, nowe, wpisujące się w aktualnie prowadzone badania naukowe, a ich dowody wymagały w wielu miejscach niełatwych i bardzo subtelnych rozważań. Autor rozwiązał w nich istotne problemy dotyczące szkieletów zbiorów. W znacznym stopniu usystematyzował pojęcia i w przypadku zbiorów definiowalnych w o-minimalnej strukturze, pokazał związki między rozważanymi pojęciami. Wstęp dobrze umiejscawia i motywuje podjęte rozważania, a ostatnie dwa rozdziały pokazują możliwosci dalszego rozwoju teorii. Z wszystkimi problemami Autor poradził sobie bardzo dobrze. Dowody są zrozumiałe. Pomagają w tym liczne ilustracje i przykłady.

Praca w kilku częściach ma charakter dość techniczny, sprawdzenie jej wymagało długiego czasu. Zawiera ona pewne drobne błędy zecerskie i niedociągnięcia, na przykład:

- w definicji 3.10 powinno być $C \subset \mathbb{R}^n$ zamiast $C \in \mathbb{R}^n$;
- twierdzenie 3.12 mogłoby być opatrzone cytatem;
- w twierdzeniu 3.14 pojawia się $d(x, f^{-1}(0))$, a definicja funkcji odległości pojawia się dopiero w punkcie 3.3;
- w dowodzie twierdzenia 3.17 Autor dochodzi do sprzeczności, jak sie wydaje z przypuszczeniem, że zbiór M_X ma niepuste wnętrze;
- w rysunku 3.1 jest kilka pomyłek;
- w definicji funkcji odległości od zbioru należało zaznaczyć, co przez to rozumiemy, gdy zbiór jest pusty;
- w twierdzeniu 3.23 należało założyć, że $k > 1$;
- w twierdzeniach 3.29 i 4.46 brak założenia, że zbiór X jest domknięty;

- na stronie 38 Autor powołuje się na twierdzenie 4.18, a w pracy jest propozycja 4.18, podobnie powołuje się na wniosek 4.8, a jest twierdzenie 4.8.
- w twierdzeniu 4.57 brak założenia o domkniętości zbioru G;
- Brak streszczenia w języku polskim nie ułatwiają lektury pracy, zwłaszcza że pojawiają się w niej terminy nie używane w języku polskim.

Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pana Adama Białożyta sytuuje się w geometrii algebraicznej, a dokładniej w teorii o-minimalnych struktur. Dotyczy ważnych i trudnych zagadnień teorii szkieletów zbiorów. Wstęp dość dobrze wyjaśnia jej genezę. Wszystkie dowody wymagały dużej biegłości rachunkowej i pomysłowości. Lektura pracy pozwala wnioskować, że Autor posiada gruntowną wiedzę i dobrą orientację w zakresie prowadzonych badań. Widać również jego dużą samodzielność w prowadzonych badaniach naukowych. Wyniki uzyskane w pracy oraz ich rozwiązania są oryginalne, wzbogacają one stan obecnej wiedzy w zakresie szkieletów zbiorów, zostały opatrzone wyczerpującymi komentarzami i przykładami. Wnoszą one nowe światło na zagadnienia dotyczące własności metrycznych zbiorów.

Stwierdzam, że recenzowana praca Pana Adama Białożyta spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim przez Ustawę z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym (Dz.U. 2016 poz. 882). Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie Pana mgr Adama Białożyta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z uwagi na doniosłość uzyskanych wyników, wnoszę o wyróżnienie pracy.